УДК 658.51:631.3

РОЗРАХУНОК ЙМОВІРНОСТІ ДИСКРЕТНИХ СТАНІВ СИСТЕМИ ІЗ ЧОТИРМА ОДИНИЦЯМИ ЗБИРАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

д. ф-м. н. Ю. Ковальчик, О. Говда
Львівський національний аграрний університет

Аналіз проблеми. Підвищити ефективність проектів використання виробничо-технічних ресурсів вдосконаленням методів управління наявним парком техніки з урахуванням стохастичного характеру зміни її дискретних станів – актуальна науково-практична проблема.

Огляд останніх досліджень і публікацій. Для збирання зернових культур використовують складну і дорогу техніку. Тому природно, що одним з пріоритетних завдань розвитку зернозбиральної техніки є підвищення її продуктивності. Вдосконаленню моделей розрахунку показників продуктивності збиральної техніки, зокрема комбайнів, присвячені праці багатьох учених. Здебільшого в таких моделях використовують узагальнений показник – добову продуктивність комбайна, що враховує технічну продуктивність у заданих умовах, простої через невчасну подачу транспортних засобів, технологічні та технічні відмови, погодні умови впродовж доби тощо. Такі моделі представлені у роботах [1, 2]. Проте подібні моделі не дають змоги врахувати структуру неефективного використання часу зміни та дію обслуговувальних систем, зокрема технічних підрозділів парків збиральної техніки, що доволі ефективно можна змоделювати за допомогою стохастичного підходу. Тому у працях [3, 4] обґрунтовано доцільність та методологію застосування випадкових марківських процесів у моделях визначення продуктивності технічних засобів зі складанням математичної моделі.

Постановка задачі. На основі підходу (застосування випадкових марківських процесів), сформульованого раніше у роботах [3, 4], у статті [5] подано модельний приклад для системи, утвореної трьома одиницями збиральної техніки.

Розглянемо модельний приклад для системи, утвореної із чотирьох елементів. На основі стохастичної моделі [5] складемо систему Колмогорова для розрахунку ймовірності перебування системи, складеної з чотирьох одиниць збиральної техніки, у можливих дискретних станах через управління проектами збирання сільськогосподарської продукції.

Для цього запишемо можливі дискретні стани цієї системи: S_1 – усі чотири одиниці справні; S_2 – перша одиниця ремонтується, друга, третя та четверта є справні; S_3 – друга одиниця ремонтується, а перша, третя, четверта є справні; S_4 – третя одиниця ремонтується, а перша, друга і четверта є справні; S_5 – четверта одиниця ремонтується, а перша, друга, третя є справні; S_6 – перша і друга одиниці ремонтуються, а третя та четверта є справні; S_7 – перша та третя одиниці ремонтуються, а друга і четверта є справні; S_8 – перша та четверта одиниці ремонтуються, а друга і третя є справні; S_9 – друга та третя одиниці ремонтуються, а перша і четверта є справні; S_{10} – друга та четверта одиниці ремонтуються, а перша і третя є справні; S_{11} – третя та четверта одиниці ремонтуються, а перша і друга є справні; S_{12} – перша, друга та третя одиниці ремонтуються, а четверта є справна; S_{13} – перша, друга та четверта одиниці ремонтуються, а третя є справна; S_{14} – перша, третя та четверта одиниці ремонтуються, а друга є справна; S_{15} – друга, третя та четверта одиниці ремонтуються, а перша є справна; S_{16} – усі чотири одиниці ремонтуються.

Припускаємо, що середній час ремонту одиниці сільськогосподарської техніки не залежить від того, чи ремонтується одна одиниця, чи кілька відразу. Також вважаємо, що, наприклад, перехід системи зі стану S_1 у стан S_6 можливий лише через стани S_2 та S_3. Тобто вважаємо, що всі одиниці виходять із ладу незалежно одна від одної, ймовірністю одночасного виходу їх із ладу нехтуємо.

Тут λ_i (i = 1…4) – інтенсивності потоків подій, що сприяють відмовам відповідно першої, другої, третьої та четвертої одиниць техніки; μ_i (i = 1...4) – інтенсивності потоків подій "закінчення ремонту" відповідно першої, другої, третьої та четвертої одиниць.

Розглянемо систему S, яка має шістнадцять можливих станів S_1, S_2, …, S_{16}. Через $p_i(t)$ позначатимемо ймовірність перебування системи S у момент часу t у стані S_i (i = 1...16). Для відшукання ймовірностей станів $p_i(t)$ складемо систему диференціальних рівнянь Колмогорова [5]:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= \mu_1 p_2 + \mu_2 p_3 + \mu_3 p_4 + \mu_4 p_5 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) p_1, \\
\frac{dp_2}{dt} &= \lambda_1 p_1 + \mu_2 p_6 + \mu_3 p_7 + \mu_4 p_8 - (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_1) p_2, \\
\frac{dp_3}{dt} &= \lambda_2 p_1 + \mu_1 p_6 + \mu_3 p_9 + \mu_4 p_{10} - (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_2) p_3, \\
\frac{dp_4}{dt} &= \lambda_3 p_1 + \mu_1 p_7 + \mu_2 p_9 + \mu_4 p_{11} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 + \mu_3) p_4, \\
\frac{dp_5}{dt} &= \lambda_4 p_1 + \mu_1 p_8 + \mu_2 p_{10} + \mu_3 p_{11} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_4) p_5, \\
\frac{dp_6}{dt} &= \lambda_2 p_2 + \lambda_1 p_3 + \mu_3 p_{12} + \mu_4 p_{13} - (\lambda_3 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_2) p_6, \\
\frac{dp_7}{dt} &= \lambda_3 p_2 + \lambda_1 p_4 + \mu_2 p_{12} + \mu_4 p_{14} - (\lambda_2 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3) p_7, \\
\frac{dp_8}{dt} &= \lambda_4 p_2 + \lambda_1 p_5 + \mu_2 p_{13} + \mu_3 p_{14} - (\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_1 + \mu_4) p_8,
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{dp_9}{dt} = \lambda_3 p_3 + \lambda_2 p_4 + \mu_1 p_{12} + \mu_4 p_{15} - (\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_2 + \mu_3)\, p_9, \\
&\frac{dp_{10}}{dt} = \lambda_4 p_3 + \lambda_2 p_5 + \mu_1 p_{13} + \mu_3 p_{15} - (\lambda_1 + \lambda_3 + \mu_2 + \mu_4)\, p_{10}, \\
&\frac{dp_{11}}{dt} = \lambda_4 p_4 + \lambda_3 p_5 + \mu_1 p_{14} + \mu_2 p_{15} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_3 + \mu_4)\, p_{11}, \\
&\frac{dp_{12}}{dt} = \lambda_3 p_6 + \lambda_2 p_7 + \lambda_1 p_9 + \mu_4 p_{16} - (\lambda_4 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\, p_{12}, \\
&\frac{dp_{13}}{dt} = \lambda_4 p_6 + \lambda_2 p_8 + \lambda_1 p_{10} + \mu_3 p_{16} - (\lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_4)\, p_{13}, \\
&\frac{dp_{14}}{dt} = \lambda_4 p_7 + \lambda_3 p_8 + \lambda_1 p_{11} + \mu_2 p_{16} - (\lambda_2 + \mu_1 + \mu_3 + \mu_4)\, p_{14}, \\
&\frac{dp_{15}}{dt} = \lambda_4 p_9 + \lambda_3 p_{10} + \lambda_2 p_{11} + \mu_1 p_{16} - (\lambda_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)\, p_{15}, \\
&\frac{dp_{16}}{dt} = \lambda_4 p_{12} + \lambda_3 p_{13} + \lambda_2 p_{14} + \lambda_1 p_{15} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)\, p_{16}
\end{aligned}
\right\} \qquad (1)
$$

Виклад основного матеріалу. Щоб розв'язати систему рівнянь Колмогорова та знайти ймовірності станів, передусім потрібно задати початкові умови. Якщо точно відомий початковий стан системи S_i, то у початковий момент (при t = 0,1 год) $p_i(0, 1) = 1$, всі інші початкові ймовірності дорівнюють нулю.

У нашому випадку природно припустити, що в початковий момент часу всі чотири одиниці техніки справні, тобто розв'язуватимемо систему (1) за таких початкових умов:

$$p_1(0, 1) = 1, \quad p_i(0, 1) = 0, \quad (i = 1\ldots16). \qquad (2)$$

Розглянемо інтенсивності $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$, $\lambda_4(t)$ як функції від часу, що підпорядковані закону розподілу Вейбулла. Це підтверджують дані спостережень, що подані у праці [6]. Функції інтенсивності відмов моделюють у вигляді $\lambda(t) = \lambda_0 \alpha t^{\alpha-1}$, де λ_0 і α – числові параметри закону розподілу Вейбулла [7].

Для визначення параметрів λ_0 і α функції $\lambda(t)$ використаємо математично оброблені статистичні дані [6] та метод найменших квадратів. Після знаходження числових параметрів функції $\lambda_i(t)$ матимуть вигляд:

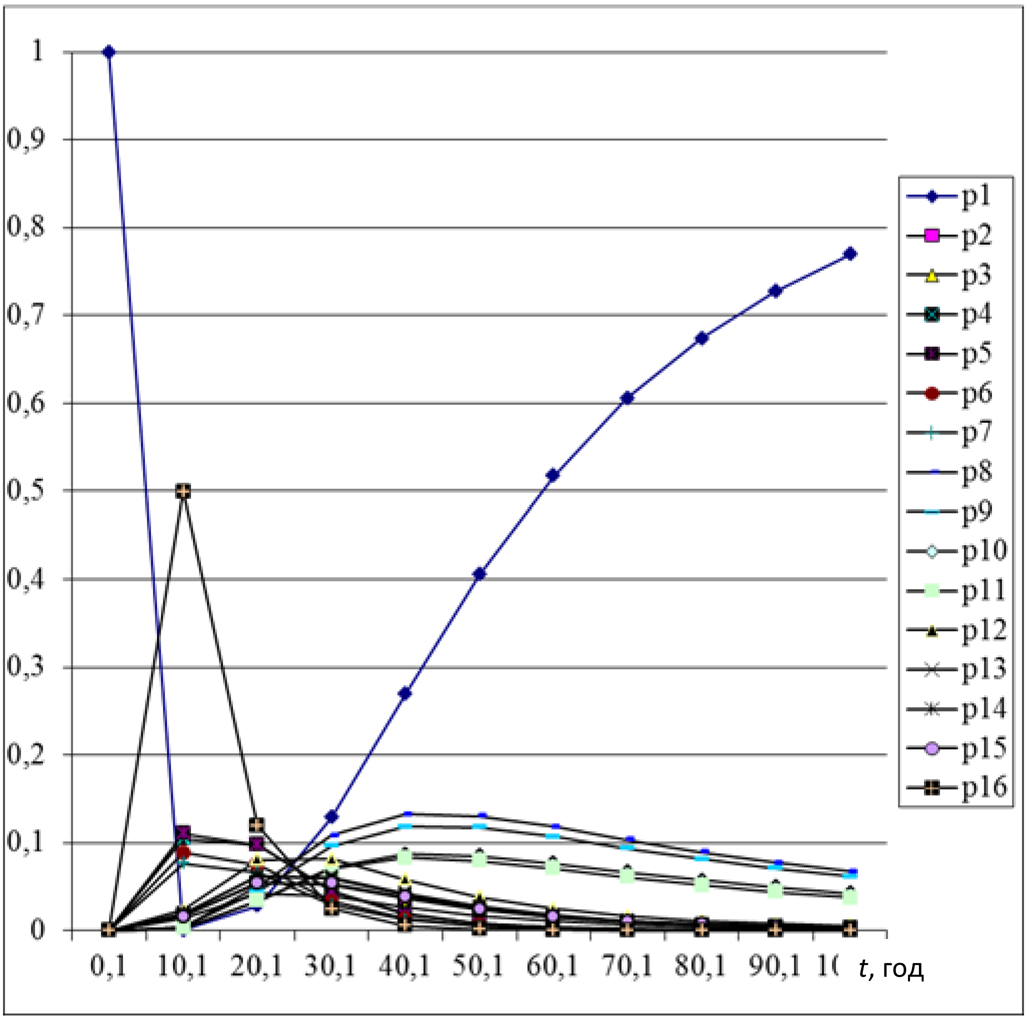
$$
\begin{aligned}
&\lambda_1(t) = 877{,}96 \cdot t^{-1{,}88193}, \quad \lambda_2(t) = 816{,}84 \cdot t^{-1{,}85615}, \\
&\lambda_3(t) = 838{,}66 \cdot t^{-1{,}91494}, \quad \lambda_4(t) = 838{,}66 \cdot t^{-1{,}91494}.
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Зробимо модельне припущення, що інтенсивність потоку подій, що сприяють виходу зі стану поломки, не залежить від часу, тобто, знайдемо значення μ_1, μ_2, μ_3, μ_4. Для цього розглянемо конкретні марки зернозбиральних комбайнів "Нива эффект", "CS 520, New Holland", "CS 640 RS, New Holland", "CX 840, New Holland". На сучасному на ринку України їх налічується біля 50 тисяч, що відрізняються як технічними, так і вартісними показниками [6]. На основі хронометражних спостережень за роботою зернозбиральних комбайнів, що працювали в умовах сільськогосподарських підприємств Львівщини, зібрані та математично опрацьовані статистичні дані про згадані часткові функціональні показники комбайнів (усунення технічних відмов) [6]. Зокрема,

$$\mu_1 = 1{,}75, \quad \mu_2 = 2, \quad \mu_3 = 2{,}25, \quad \mu_4 = 2{,}5. \qquad (4)$$

Відтак, система (1) набуває означеного вигляду, причому з нелінійними коефіцієнтами $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$, $\lambda_4(t)$.

Отже, маємо сформульовану задачу Коші для системи (1) з початковими умовами (2), яку розв'яжемо числовими методами за допомогою програмного пакета Maple. Отримали табульовані розв'язки, які подаємо тут у вигляді графіків (див. рисунок).



Залежність від часу ймовірностей виходу техніки з ладу.

На основі аналізу співвідношень функцій на рисунку встановлено, як змінюються ймовірності станів системи з плином часу. Отримані результати за умови відомої номінальної продуктивності кожної одиниці техніки дають можливість обчислити математичне сподівання швидкості збору врожаю наявним парком техніки. Відтак, за заданого інтервалу надійності збору врожаю на визначеній площі можна сформулювати параметри, за якими можна оцінити достатню кількість одиниць парку збиральної техніки.

Висновки. Виявлено, що на різних проміжках часу ймовірності перебування системи чотирьох одиниць у відповідних дискретних станах суттєво відрізняються. Зокрема, встановлено, що p_1 – ймовірність того, що всі чотири одиниці збиральної техніки будуть справні, є найбільшою, хоч і достатньо швидко зменшується у перші 10 год роботи системи. У наступні 20 год значення цієї ймовірності досягає свого мінімуму. Після 30 год роботи системи p_1 знову швидко зростає, значно перевищуючи ймовірності інших станів. Ймовірності інших станів мають в перші 20-40 год роботи системи зростаючий характер, після чого поволі спадають. За отриманими результатами можна оцінити середню продуктивність парку збиральної техніки у кожен момент часу, а отже, оптимально формувати парк на період збору врожаю.

Бібліографічний список

1. Сидорчук О. Імітаційна модель роботи зернозбирального комбайна впродовж сезону / О. Сидорчук, В. Тимочко, Є. Ціп // Вісник ЛДАУ: агроінженерні дослідження. – 2001. – № 5. – С. 17–26.
2. Тимочко В. Відображення моделлю проекту збирання врожаю зернових культур у сільськогосподарському підприємстві / В. Тимочко // Вісник ЛНАУ: агроінженерні дослідження. – 2009. – № 13. – С. 43–51.
3. Вентцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель. – М. : Высш. шк., 2001. – 208 с.
4. Ковальчик Ю. Використання випадкових марківських процесів в управлінні проектами збирання сільськогосподарської продукції / Ю. Ковальчик, С. Ковалишин, В. Тимочко // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2011. – № 1. – С. 57–59.
5. Ковальчик Ю. І. Управління проектами збирання продукції із стохастичним моделюванням системи трьох об’єктів / Ю. І. Ковальчик, В. О. Тимочко, О. І. Говда // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2012. – № 1. – С. 57–59.
6. Сидорчук Л. Ідентифікація конфігурації парку комбайнів у проектах систем централізованого збирання ранніх зернових культур / Л. Сидорчук // Автореферат дисертації канд. техн. наук. – Львів, 2008. – 18 с.
7. Васілевський О. М. Нормування показників надійності технічних засобів / О. М. Васілевський, В. О. Поджаренко. – Вінниця: ВНТУ, 2010. – 130 с.

Ю. Ковальчик, О. Говда. Розрахунок ймовірності дискретних станів системи із чотирма одиницями збиральної техніки.

Застосовано підхід, заснований на положеннях теорії випадкових марківських процесів, до визначення ефективності функціонування систем із дискретними станами, зокрема, для визначення імовірності відповідних станів, у яких може перебувати система. Розглянуто приклад системи, складеної з чотирьох одиниць збиральної техніки. Сформульовано задачу Коші для системи диференціальних рівнянь, які мають шістнадцять невідомих функцій від часу – ймовірностей перебування системи у різних

станах. Параметрами системи є інтенсивності потоків подій, що сприяють відмові *i*-ої одиниці збиральної техніки, та інтенсивності потоків подій “закінчення ремонту” *i*-ої одиниці збиральної техніки. Інтенсивності відмов розглянуто як функції від часу. Систему розв’язано за допомогою числових методів (numerical methods).

Розраховано ймовірності перебування системи у дискретних станах. Показано, як змінюються ймовірності станів залежно від часу. Запропоновано спосіб оцінки середньої продуктивності парку збиральної техніки.

Ключові слова: управління проектами, марківський процес, дискретні стани, рівняння Колмогорова.

Y. Kovalchyk, O. Govda. The calculation of discrete states probability of system with three units of harvesting techniques.

The given article is dedicated to the improvement of determination method of the efficiency of functioning of the system with discrete states. It is offered the application of Markov processes for the determination of appropriate states probability, in which the system can be. The model example is considered. In particular, the system composed of four units of harvesting techniques is considered. For this the system of differential equations. The intensities of events flow appear in the system. They cause the rejection of unit i of harvesting techniques and the intensities of events flow after “finishing of repairing” of unit i of harvesting techniques. The intensities of rejections as time function are considered.

The system is solved using numerical methods. The probabilities of finding the system in the discrete states are calculated. The graphs are given. It is shown how the probabilities of states depending on time change.

Keywords: project management, Markov processes, discrete states, Kolmogorov’s equations.

Ю. Ковальчик, О. Говда. Расчет вероятности дискретных состояний системы с четырьмя единицами уборочной техники.

Применен подход, основанный на положениях теории случайных марковских процессов, к определению эффективности функционирования систем с дискретными состояниями, в частности, для определения вероятности соответствующих состояний, в которых может находиться система. Рассмотрен пример системы, составленной из четырех единиц уборочной техники. Сформулирована задача Коши для системы дифференциальных уравнений, которые имеют шестнадцать низвестных функций от времени – вероятностей пребывания системы в различных состояниях. Параметрами системы являются интенсивности потоков событий, способствующих отказу i-ой единицы уборочной техники, и интенсивности потоков событий "окончание ремонта" i-ой единицы уборочной техники. Интенсивности отказов рассмотрены как функции от времени. Система решена с помощью численьных методов (numerical methods).

Рассчитаны вероятности нахождения системы в дискретных состояниях. Показано, как меняются вероятности состояний в зависимости от времени. Предложен способ оценки средней производительности парка уборочной техники.

Ключевые слова: управление проектами, марковский процесс, дискретные состояния, уравнение Колмогорова.