UDK 539.3

ANALIZA STATYCZNA CIENKICH PŁYT ORTOTROPOWYCH NA PODŁOŻU SPĘŻYSTYM WINKLERA

M. Delyavskyy, prof. dr hab. inż.
ORCID ID: 0000-0001-6952-0870
Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy
K. Rosiński, mgr inż.
ORCID ID: 0000-0003-3325-1108
Kierownik Zespołu Wycen, Alstal, Grupa Budowlana, Spółka z ograniczoną odpowiedzialnością, Spółka komandytowa Jacewo 76, 88-100 Inowrocław
Yu. Famulyak, dr inż.
ORCID ID: 0000-0003-3044-5513
Lwowski Narodowy Uniwersytet Rolniczy

https://doi.org/10.31734/architecture2021.22.032

Delyavskyy M., Rosiński K., Famulyak Yu. Analiza statyczna cienkich płyt ortotropowych na podłożu spężystym winklera

Płyty są szeroko stosowane jako elementy konstrukcji budowlanych i inżynierskich. W budownictwie najszerzej wykorzystuje się cienkie płyty żelbetowe, które można modelować jako płyty ortotropowe. Do rozwiązania takich płyt stosuje się teorię Kirchhoffa. Rozważa się różne podejścia do analizy cienkich płyt ortotropowych na podłożu sprężystym Winklera.

W podanym artykule opracowano model obliczeniowy cienkich płyt ortotropowych o dowolnej konfiguracji i warunkach brzegowych, spoczywającej na podłożu sprężystym Winklera. W odróżnieniu od metody elementów skończonych (MES), gdzie każdą część konstrukcji dzieli się na bardzo drobne cząstki (elementy skończone), w rozpatrywanym modelu rozważa się dość duże części, zwane elementami konstrukcyjnymi. Opracowano model matematyczny elementu konstrukcyjnego w postaci płyty prostokątnej.

Rozwiązanie takiego elementu sprowadzono do rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego czwartego rzędu, które jest równaniem równowagi.

Otrzymano ścisłe rozwiązanie tego równania w postaci sumy funkcji kształtu ugięcia płyty pomnożonych przez nieznane współczynniki oraz funkcji obciążeniowych.

Współczynniki te określają stopnie swobody ugięcia płyty. Ich liczba jest zawsze równa liczbie warunków brzegowych zapisanych w oddzielnych węzłach na krawędziach płyty. Funkcje kształtu wyrażone są przez funkcje bazowe, które są podstawą modelu obliczeniowego płyty.

Podobnie otrzymano wyrażenia na przemieszczenia poziome, momenty i siły tnące wyrażone przez własne funkcje kształtu i funkcje obciążeniowe. Ich zbiór tworzy model obliczeniowy elementu konstrukcyjnego.

Takie podejście pozwala łatwo modelować statyczne, kinematyczne i mieszane warunki brzegowe na brzegu płyty.

Słowa kluczowe: Plyta ortotropowa, model obliczeniowy, podłoże sprężyste Winklera, funkcji bazowe różnych rzędów, funkcji kształtu, funkcji obciążeniowe.

Делявський М., Росінський К., Фамуляк Ю. Статичний аналіз тонких ортотропних плит на пружній основі Вінклера

Розглядається тонка ортотропна плита, покладена на пружну основу Вінклера. Побудована математична модель такої плити. Розроблено аналітично-числовий підхід до розрахунку пружної рівноваги таких конструкцій. Розрахунок конструкцій зведено до розв'язку диференціального рівняння в частинних похідних за певних граничних умов. Диференціальне рівняння залежить від пружних сталих матеріалу: жорсткості плити на згин, кручення і побічні жорсткості, а також від коефіцієнта жорсткості основи.

Розв'язок диференціального рівняння представлено у вигляді загального розв'язку однорідного рівняння і якогось часткового розв'язку неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок представлено у вигляді суми добутків координатних функцій, помножених на невідомі коефіцієнти, з допомогою яких виконуються краєві умови на контурі плити. Сенс цих коефіцієнтів – ступені свободи прогину плити. Їх кількість завжди дорівнює кількості граничних умов, записаних в окремих точках на краях плити. У кожній точці записуються по дві краєві умови.

Своєю чергою, частковий розв'язок основного диференціального рівняння представлено як суму добутків силових функцій на інші невідомі коефіцієнти, з допомогою яких виконуються умови на поверхні плити.

Подібно отримано співвідношення на переміщення, моменти і поперечні сили, виражені через власні координатні і силові функції. Сукупність отриманих виразів утворює розрахункову модель плитної конструкції.

Основою моделі є базові функції нульового порядку, через які виражається прогин плити. Тангенціальні переміщення виражаються через базові функції першого порядку, згинні і крутильні моменти – через базові функції другого порядку, а поперечні сили і узагальнені поперечні сили – через базові функції третього порядку. Базові функції вищого порядку виражаються через базові функції нижчих порядків і в результаті – через базові функції нульового порядку, тобто прогини плити.

Запропонований підхід дає змогу доволі просто моделювати статичні, кінематичні і змішані краєві умови на полігональному контурі плити.

Ключові слова: ортотропна плита, розрахункова модель, пружна основа Вінклера, базові функції різних порядків, функції форми, фукції навантаження.

Deliavskyi M., Rosinskyi K., Famuliak Yu. Static analysis of thin orthotropic decks on Winkler elastic foundation

One has examined the thin orthotropic deck on Winkler elastic foundation. A mathematical model of such deck is constructed. One has developed an analytical and numerical approach to the calculation of the elastic equilibrium of such structures. The calculation of structures is reduced to the solution of the differential equation in partial derivatives due to certain boundary conditions. The differential equation depends on the elastic constants of the material, such as the stiffness of the deck as to bending, torsion and lateral stiffness, as well as the stiffness coefficient of the foundation.

The solution of the differential equation is represented as a general solution of a homogeneous equation and some partial solution of an inhomogeneous equation. The general solution is presented as the sum of the products of the coordinate functions multiplied by the unknown coefficients by which the boundary conditions on the deck contour are satisfied. The meaning of these coefficients is the degree of freedom of the deck deflection. Their number is always equal to the number of boundary conditions recorded at individual points on the edges of the deck. Two boundary conditions are written at each point.

In turn, the partial solution of the basic differential equation is represented as the sum of the products of force functions on other unknown coefficients using which the conditions on the deck surface are satisfied.

Similarly, the relations on displacements, moments and transverse forces, expressed through their own coordinate and force functions, are obtained. The set of obtained expressions forms a computational model of the slab structure.

The fundamentals of the model are the basic functions of zero order, which is used to express the deflection of the deck. Tangential displacements are expressed using basic functions of the first order, bending and torsional moments – using basic functions of the second order, and transverse forces and generalized transverse forces – using functions of the third order. Basic functions of higher order are expressed using basic functions of lower orders and ultimately – using basic functions of zero order, that is deflections of the deck.

The proposed approach allows simulating static, kinematic and mixed boundary conditions on the polygonal contour of the deck.

Key words: orthotropic deck, calculation model, Winkler elastic foundation, basic functions of diverse orders, shape functions, load functions.

Wstęp. Płyty są szeroko stosowane jako elementy konstrukcji budowlanych i inżynierskich. W budownictwie najszerzej wykorzystuje się cienki płyty żelbetowe, które można modelować płytami ortotropowymi. Do rozwiązania takich płyt stosuje się teoria Kirchhoffa.

Analiza ostatnich badań i publikacji. Publikacji poświęcone stanu naprężeń w plytach cienkich na podłożu sprężystym można rozdzielić na dwie zasadnicze grupy: podłoża analogowe [1–4] i półprzestreń sprężysta [5; 6; 12]. Ich analiza podana w artykule [7]. Rozważa się różne podejścia do analizy cienkich plyt ortotropowych [8–10] na podłożu sprężystym Winklera [11]. W przedstawionym artykule rozważa się płyta cienka ortotropowa na tym podłożu. Oryginalnym elementem pracy jest przedstawienie przemieszczeń, momentów i sił tnących w postaci sumy iloczynów funkcji obciążeniowych i funkcji kształtu pomnożonych przez nieznane parametry modelu.

Wykład materiału podstawowego. Rozważmy cienką płytę ortotropową spoczywającą na podłożu sprężystym Winklera. Stan równowagi takiej płyty opisuje równanie różniczkowe czwartego rzędu w pochodnych cząstkowych

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}+K_0 w=q\,. \quad (1)$$

gdzie D_{ij} są to sztywności płyty na zginanie w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, na skręcanie i sztywności związane; K_0 – współczynnik sztywności podłoża; q – intensywność obciążenia przyłożonego do górnej powierzchni płyty.

Rozwiązanie ogólne równania (1) wybieramy w postaci sumy

$$w=w_0+w_*\,. \quad (2)$$

całki ogólnej w_0 równania jednorodnego

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}+K_0 w=0\,. \quad (3)$$

oraz całki szczególnej niejednorodnego równania (1).

W celu określenia tej całki obciążenie przyłożone do górnej powierzchni płyty rozwijamy w podwójny szeregi Fouriera

$$q(x_1,x_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_{mn}^0\cos\left(\delta_m^{[1]}x_1\right)\cos\left(\delta_n^{[2]}x_2\right)+$$
$$+a_{mn}^1\cos\left(\gamma_m^{[1]}x_1\right)\cos\left(\gamma_n^{[2]}x_2\right)+b_{mn}^0\cos\left(\delta_m^{[1]}x_1\right)\sin\left(\gamma_n^{[2]}x_2\right)+$$
$$+b_{mn}^1\cos\left(\gamma_m^{[1]}x_1\right)\sin\left(\delta_n^{[2]}x_2\right)+c_{mn}^0\sin\left(\gamma_m^{[1]}x_1\right)\cos\left(\delta_n^{[2]}x_2\right)+$$
$$c_{mn}^1\sin\left(\delta_m^{[1]}x_1\right)\cos\left(\gamma_n^{[2]}x_2\right)+d_{mn}^0\sin\left(\gamma_m^{[1]}x_1\right)\sin\left(\gamma_n^{[2]}x_2\right)+ \quad (4)$$
$$+d_{mn}^1\sin\left(\delta_m^{[1]}x_1\right)\sin\left(\delta_n^{[2]}x_2\right)$$

Parametry rozwinięcia

$$\delta_m^{[1]}=\frac{(2m-1)\pi}{2a_1};\ \delta_n^{[2]}=\frac{(2n-1)\pi}{2a_2};$$

$$\gamma_m^{[1]}=\frac{m\pi}{a_1};\ \gamma_n^{[2]}=\frac{n\pi}{a_2}. \quad (5)$$

Współczynniki szeregów określają się tak:

$$a_{mn}^0=\frac{1}{a_1a_2}\int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_2}^{a_2}q(x_1,x_2)\cos\left(\delta_m^{[1]}x_1\right)\cos\left(\delta_n^{[2]}x_2\right)dx_2dx_1;$$

$$a_{mn}^1=\frac{1}{a_1a_2}\int_{-a_1}^{a_1}\int_{-a_2}^{a_2}q(x_1,x_2)\cos\left(\gamma_m^{[1]}x_1\right)\cos\left(\gamma_n^{[2]}x_2\right)dx_2dx_1;(6)$$

i t.d. To jest najbardziej ogólne przedstawienie w postaci sumy podwójnych szeregów Fouriera obciążenia zewnętrznego jako funkcji dwóch zmiennych. Takie podejście pozwala jakiekolwiek obciążenie (ciągłe, dyskretne, skupione) zamienic funkcja ciągłą co jest istotną przewagą opracowanej metody.

Całkę szczególną równania (1) wybieramy w postaci podobnej do jego prawej części

$$w_*=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_{mn}\cos\left(\delta_m^{[1]}x_1\right)\cos\left(\delta_n^{[2]}x_2\right)+A_{mn}\cos\left(\gamma_m^{[1]}x_1\right)\cos\left(\gamma_n^{[2]}x_2\right)+$$
$$+b_{mn}\cos\left(\delta_m^{[1]}x_1\right)\sin\left(\gamma_n^{[2]}x_2\right)+B_{mn}\cos\left(\gamma_m^{[1]}x_1\right)\sin\left(\delta_n^{[2]}x_2\right)+c_{mn}\sin\left(\gamma_m^{[1]}x_1\right)\cos\left(\delta_n^{[2]}x_2\right)+$$
$$+C_{mn}\sin\left(\delta_m^{[1]}x_1\right)\cos\left(\gamma_n^{[2]}x_2\right)+d_{mn}\sin\left(\gamma_m^{[1]}x_1\right)\sin\left(\gamma_n^{[2]}x_2\right)+D_{mn}\sin\left(\delta_m^{[1]}x_1\right)\sin\left(\delta_n^{[2]}x_2\right) \quad (7)$$

z niewiadomymi współczynnikami.

Przyrównując w tym równaniu wyrażenia przy jednakowych iloczynach funkcji trygonometrycznych otrzymujemy układ równań algebraicznych według niewiadomych współczynników A_{mn}^0, A_{mn}^1 i t.d.

$$\left(D_{11}\delta_m^{[1]4}+2(D_{12}+2D_{66})\delta_m^{[1]2}\delta_n^{[2]2}+D_{22}\delta_n^{[2]4}+K_0\right)A_{mn}^0=a_{mn}^0,$$
$$\Big(D_{11}\delta_m^{[1]4}B_{mn}+2(D_{12}+2D_{66})\delta_m^{[1]2}\gamma_n^{[2]2}B_{mn}+$$
$$+D_{22}\gamma_n^{[2]4}B_{mn}+K_0B_{mn}\Big)B_{mn}^0=b_{mn}^0, \quad (8)$$

Całkę ogólną równania (3) wybieramy w postaci [9]:

$$w_0=\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{f_{1k}^{[1]}(x_1)\sin\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right)+f_{2k}^{[1]}(x_1)\cos\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right)+$$
$$+f_{3k}^{[1]}(x_1)\sin\left(\delta_k^{[2]}x_2\right)+f_{4k}^{[1]}(x_1)\cos\left(\delta_k^{[2]}x_2\right)+ \quad (9)$$
$$+f_{5k}^{[2]}(x_2)\sin\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right)+f_{6k}^{[2]}(x_2)\cos\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right)+$$
$$+f_{7k}^{[2]}(x_2)\sin\left(\delta_k^{[1]}x_1\right)+f_{8k}^{[2]}(x_2)\cos\left(\delta_k^{[1]}x_1\right)\Big\}.$$

gdzie $f_{pk}^{[j]}(x_j)$, $j=1,2$, $p=1\div 8$ są to niewiadome funkcji. Podstawiamy rozwiązanie (9) do równania (3) po rozdzieleniu zmiennych przychodzimy do układu czterech niezwiązanych równań różniczkowych zwyczajnych czwartego rzędu względem niewiadomych funkcji o wskaźnikach parzystych:

$$D_{11}f_{2k}^{[1]^{(IV)}}(x_1)-2(D_{12}+2D_{66})\gamma_k^{[2]^2}f_{2k}^{[1]''}(x_1)+$$
$$+\left(D_{22}\gamma_k^{[2]^4}+K_0\right)f_{2k}^{[1]}(x_1)=0,$$
$$D_{11}f_{4k}^{[1]^{(IV)}}(x_1)-2(D_{12}+2D_{66})\delta_k^{[2]^2}f_{4k}^{[1]''}(x_1)+$$
$$+\left(D_{22}\delta_k^{[2]^4}+K_0\right)f_{4k}^{[1]}(x_1)=0,$$
$$D_{22}f_{6k}^{[2]^{(IV)}}(x_2)-2(D_{12}+2D_{66})\gamma_k^{[1]^2}f_{6k}^{[2]''}(x_2)+$$
$$+\left(D_{11}\gamma_k^{[1]^4}+K_0\right)f_{6k}^{[2]}(x_2)=0,$$
$$D_{22}f_{8k}^{[2]^{(IV)}}(x_2)-2(D_{12}+2D_{66})\delta_k^{[1]^2}f_{8k}^{[2]''}(x_2)+ \quad (10)$$
$$+\left(D_{11}\delta_k^{[1]^4}+K_0\right)f_{8k}^{[2]}(x_2)=0.$$

Równania zawierające funkcji o wskaźnikach nieparzystych są taki same. Ten układ równań można podzielić na dwie grupy które nazwijmy grupą Γ i Δ. Każdą grupę dzielimy na podgrupy odpowiednio do kierunków zmiennych $x_\alpha, \alpha=1,2$. W taki sposób mamy cztery podgrupy: Γ_1, Δ_1, Γ_2, Δ_2. Każdej podgrupie przyporządkowane są dwie funkcji:

$$\left\{f_{1k}^{[1]}(x_1),\ f_{2k}^{[1]}(x_1)\right\}\in\Gamma_1;\ \left\{f_{3k}^{[1]}(x_1),\ f_{4k}^{[1]}(x_1)\right\}\in\Delta_1;$$
$$\left\{f_{5k}^{[1]}(x_1),\ f_{6k}^{[1]}(x_1)\right\}\in\Gamma_2;$$
$$\left\{f_{7k}^{[1]}(x_1),\ f_{8k}^{[1]}(x_1)\right\}\in\Delta_2. \quad (11)$$

Rozwiązania układu równań (10) wybieramy w postaci:

$$f_{pk}^{[j]}(x_2) = R_{pk}^{[j]} \exp\left(\lambda_k^{[j]} x_j\right), \qquad (12)$$

Podstawiamy wyrażenia (12) do układu równań (10). Otrzymujemy cztery równania algebraiczne tzw. równania charakterystyczne na parametry $\lambda_k^{[j]}$. Pierwiastki równań dotyczące grupy Γ oznaczamy wskaźnikiem „1”, a grupy Δ – wskaźnikiem „2”.

$$D_{11}\lambda_{1k}^{[1]^4} - 2(D_{12} + 2D_{66})\gamma_k^{[2]^2}\lambda_{1k}^{[1]^2} + D_{22}\gamma_k^{[2]^4} + K_0 = 0,$$

$$D_{11}\lambda_{2k}^{[1]^4} - 2(D_{12} + 2D_{66})\delta_k^{[2]^2}\lambda_{2k}^{[1]^2} + D_{22}\delta_k^{[2]^4} + K_0 = 0,$$

$$D_{22}\lambda_{1k}^{[2]^4} - 2(D_{12} + 2D_{66})\gamma_k^{[1]^2}\lambda 1_k^{[2]^2} + D_{11}\gamma_k^{[1]^4} + K_0 = 0,$$

$$D_{22}\lambda_{2k}^{[2]^4} - 2(D_{12} + 2D_{66})\delta_k^{[1]^2}\lambda_{2k}^{[2]^2} + D_{11}\delta_k^{[1]^4} + K_0 = 0, \qquad (13)$$

Badania numeryczne wykazali, że pierwiastki tych równań są zespolono-sprężone.

$$\lambda_{(1)k}^{[j]} = \alpha_{1k}^{[j]} + i\beta_{1k}^{[j]};\ \lambda_{(2)k}^{[j]} = -\lambda_{(1)k}^{[j]};$$
$$\lambda_{(3)k}^{[j]} = \overline{\lambda}_{(1)k}^{[j]};\ \lambda_{(4)k}^{[j]} = -\overline{\lambda}_{(1)k}^{[j]};\ j = 1,2. \qquad (14)$$

W taki sposób uzyskujemy ogólne rozwiązanie równań różniczkowych (10) w postaci:

$$f_{pk}^{[j]}(x_j) = \sum_{v=1}^{4} R_{(v)pk}^{[j]} \exp\left(\lambda_{(v)1k}^{[j]} x_j\right),\ p = 1,3,5,7,\ j = 1,2;$$

$$f_{pk}^{[j]}(x_j) = \sum_{v=1}^{4} R_{(v)pk}^{[j]} \exp\left(\lambda_{(v)2k}^{[j]} x_j\right),\ p = 2,4,6,8;\ j = 1,2. \qquad (15)$$

Ponieważ pierwiastki (13) tych równań są zespolono – sprężone to współczynniki $R_{(v)pk}^{[j]}$ też muszą być zespolono – sprężonymi, żeby funkcji $f_{pk}^{[j]}$ byli rzeczywiste. Wybieramy ich tak:

$$R_{(1)pk}^{[j]} = C_{(1)pk}^{[j]} + iS_{(1)pk}^{[j]},\quad R_{(2)pk}^{[j]} = C_{(2)pk}^{[j]} + iS_{(2)pk}^{[j]},$$
$$R_{(3)pk}^{[j]} = C_{(1)pk}^{[j]} - iS_{(1)pk}^{[j]},\quad R_{(4)pk}^{[j]} = C_{(2)pk}^{[j]} - iS_{(2)pk}^{[j]}. \qquad (16)$$

Wtedy funkcji $f_{pk}^{[j]}(x_j)$ przyjmują postać ostateczną:

$$f_{(1,2)k}^{[1]}(x_1) = R_{(1,2)vk} F_{vk}^0(x_1);$$
$$f_{(3,4)k}^{[1]}(x_1) = R_{(3,4)vk} \Psi_{vk}^0(x_1);$$
$$f_{(5,6)k}^{[2]}(x_2) = R_{(5,6)vk} \Phi_{vk}^0(x_2);$$
$$f_{(7,8)k}^{[2]}(x_2) = R_{(7,8)vk} \Omega_{vk}^0(x_2). \qquad (17)$$

Tutaj

$$F_{1k}^0(x_1) = \frac{\cosh\left(\alpha_{1k}^{[1]} x_1\right)\cos\left(\beta_{1k}^{[1]} x_1\right)}{\exp\left(\alpha_{1k}^{[1]} a_1\right)};$$

$$F_{2k}^0(x_1) = \frac{\cosh\left(\alpha_{1k}^{[1]} x_1\right)\sin\left(\beta_{1k}^{[1]} x_1\right)}{\exp\left(\alpha_{1k}^{[1]} a_1\right)};$$

$$F_{3k}^0(x_1) = \frac{\sinh\left(\alpha_{1k}^{[1]} x_1\right)\cos\left(\beta_{1k}^{[1]} x_1\right)}{\exp\left(\alpha_{1k}^{[1]} a_1\right)};$$

$$F_{4k}^0(x_1) = \frac{\sinh\left(\alpha_{1k}^{[1]} x_1\right)\sin\left(\beta_{1k}^{[1]} x_1\right)}{\exp\left(\alpha_{1k}^{[1]} a_1\right)}. \qquad (18)$$

Podobną strukturę posiadają funkcji F_{vk}^0, Ψ_{vk}^0, Φ_{vk}^0, Ω_{vk}^0. Zaznaczmy, że

$$F_{vk}^0(x_1) \in \Gamma_1;\ \Psi_{vk}^0(x_1) \in \Delta_1;$$
$$\Phi_{vk}^0(x_2) \in \Gamma_2;\ \Omega_{vk}^0(x_2) \in \Delta_2.$$

Nazwijmy wprowadzone funkcji funkcjami bazowymi rzędu zerowego. Podstawiamy funkcje (18) do wyrażenia na ugięcie płyty (9). Uwzględniając związki (2) i (7) otrzymujemy wyrażenia ugięcia płyty w postaci:

$$\begin{aligned} w = \sum_{k=1}^{\infty} \{ & R_{(1)vk} F_{vk}^0(x_1)\sin\left(\gamma_k^{[2]} x_2\right) + R_{(2)vk} F_{vk}^0(x_1)\cos\left(\gamma_k^{[2]} x_2\right) + \\ & + R_{(3)vk} \Psi_{vk}^0(x_1)\sin\left(\delta_k^{[2]} x_2\right) + R_{(4)vk} \Psi_{vk}^0(x_1)\cos\left(\delta_k^{[2]} x_2\right) + \\ & + R_{(5)vk} \Phi_{vk}^0(x_2)\sin\left(\gamma_k^{[1]} x_1\right) + R_{(6)vk} \Phi_{vk}^0(x_2)\cos\left(\gamma_k^{[1]} x_1\right) + \\ & + R_{(7)vk} \Omega_{vk}^0(x_2)\sin\left(\delta_k^{[1]} x_1\right) + R_{(8)vk} \Omega_{vk}^0(x_2)\cos\left(\delta_k^{[1]} x_1\right)\} + w_* \end{aligned} \qquad (19)$$

Wprowadźmy nowe funkcji

$$W_{(1)vk} = F_{vk}^0(x_1)\sin\left(\gamma_k^{[2]} x_2\right);\ W_{(2)vk} = F_{vk}^0(x_1)\cos\left(\gamma_k^{[2]} x_2\right);$$
$$W_{(3)vk} = \Psi_{vk}^0(x_1)\sin\left(\delta_k^{[2]} x_2\right);\ W_{(4)vk} = \Psi_{vk}^0(x_1)\cos\left(\delta_k^{[2]} x_2\right); \qquad (20)$$
$$W_{(5)vk} = \Phi_{vk}^0(x_2)\sin\left(\gamma_k^{[1]} x_1\right);\ W_{(6)vk} = \Phi_{vk}^0(x_2)\cos\left(\gamma_k^{[1]} x_1\right);$$
$$W_{(7)vk} = \Omega_{vk}^0(x_2)\sin\left(\delta_k^{[1]} x_1\right);\ W_{(8)vk} = \Omega_{vk}^0(x_2)\cos\left(\delta_k^{[1]} x_1\right).$$

Które nazwijmy funkcjami kształtu, a funkcji $w^* = W^*$ nazwijmy funkcjami obciążeniowymi ugięcia płyty. Korzystając z powyższych funkcji zapisujemy wyrażenia na ugięcie płyty w postaci:

$$w = R_{vpk} W_{vpk} + w_*,\ v = 1 \div 4;$$
$$p = 1 \div 8;\ k = 1 \div \infty. \qquad (21)$$

Tutaj obowiązuję zasada sumacyjna Einszteina: według wskaźnika który spotyka się w wyrażeniu dwa razy dokonujemy operacji sumuwania według przyjętej zasady. W postaci podobnej zapisujemy przemieszczenia styczne.

$$u_1 = R_{vpk} U_{vpk} + u_{1*},\quad u_2 = R_{vpk} V_{vpk} + u_{2*}, \qquad (22)$$

gdzie

$$U_{(1)vk} = F_{vk}^1(x_1)\sin\left(\gamma_k^{[2]} x_2\right);\ U_{(2)vk} = F_{vk}^1(x_1)\cos\left(\gamma_k^{[2]} x_2\right);$$
$$U_{(3)vk} = \Psi_{vk}^1(x_1)\sin\left(\delta_k^{[2]} x_2\right);\ U_{(4)vk} = \Psi_{vk}^1(x_1)\cos\left(\delta_k^{[2]} x_2\right); \qquad (23)$$
$$U_{(5)vk} = \gamma_k^{[1]} \Phi_{vk}^0(x_2)\cos\left(\gamma_k^{[1]} x_1\right);\ U_{(6)vk} = -\gamma_k^{[1]} \Phi_{vk}^0(x_2)\sin\left(\gamma_k^{[1]} x_1\right);$$
$$U_{(7)vk} = \delta_k^{[1]} \Omega_{vk}^0(x_2)\cos\left(\delta_k^{[1]} x_1\right);\ U_{(8)vk} = -\delta_k^{[1]} \Omega_{vk}^0(x_2)\sin\left(\delta_k^{[1]} x_1\right)$$

$$V_{(1)vk} = \gamma_k^{[2]} F_{vk}^0(x_1)\cos\left(\gamma_k^{[2]} x_2\right);\ V_{(2)vk} = -\gamma_k^{[2]} F_{vk}^0(x_1)\sin\left(\gamma_k^{[2]} x_2\right);$$
$$V_{(3)vk} = \delta_k^{[2]} \Psi_{vk}^0(x_1)\cos\left(\delta_k^{[2]} x_2\right);\ V_{(4)vk} = -\delta_k^{[2]} \Psi_{vk}^0(x_1)\sin\left(\delta_k^{[2]} x_2\right);$$
$$V_{(5)vk} = \Phi_{vk}^1(x_2)\sin\left(\gamma_k^{[1]} x_1\right);\ V_{(6)vk} = \Phi_{vk}^1(x_2)\cos\left(\gamma_k^{[1]} x_1\right);$$
$$V_{(7)vk} = \Omega_{vk}^1(x_2)\sin\left(\delta_k^{[1]} x_1\right);\ V_{(8)vk} = \Omega_{vk}^1(x_2)\cos\left(\delta_k^{[1]} x_1\right). \qquad (24)$$

Funkcji U_{vpk}, V_{vpk} nazwano funkcjiami kształtu a funkcji u_{1*}, u_{2*} – funkcjiami obciążeniowymi przemieszczeń poziomych u_1 i u_2. Wprowadzone nowe funkcji bazowe

$$F_{1k}^{1}(x_1)=\frac{\partial F_{1k}^{0}(x_1)}{\partial x_1}=\alpha_{1k}^{[1]}F_{3k}^{0}(x_1)-\beta_{1k}^{[1]}F_{2k}^{0}(x_1);$$

$$F_{2k}^{1}(x_1)=\frac{\partial F_{2k}^{0}(x_1)}{\partial x_1}=\alpha_{1k}^{[1]}F_{4k}^{0}(x_0)+\beta_{1k}^{[1]}F_{1k}^{0}(x_1);$$

$$F_{3k}^{1}(x_1)=\frac{\partial F_{3k}^{0}(x_1)}{\partial x_1}=\alpha_{1k}^{[1]}F_{1k}^{0}(x_1)-\beta_{1k}^{[1]}F_{4k}^{0}(x_1);$$

$$F_{4k}^{1}(x_1)=\frac{\partial F_{4k}^{0}(x_1)}{\partial x_1}=\alpha_{1k}^{[1]}F_{2k}^{0}(x_1)+\beta_{1k}^{[1]}F_{3k}^{0}(x_1). \quad (25)$$

nazwano funkcjami bazowymi. pierwszego rzędu. Te same związkiki obowjązują i dla innych funkcji bazowych.

Momenty zginające zapisujemy w postaci podobnej.

$$M_{11}=R_{vpk}X_{vpk}+M_{11*},$$
$$M_{22}=R_{vpk}Y_{vpk}+M_{22*}, \quad (26)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
X_{(1)vk}&=\left[F^2(x_1)-v\gamma_k^{[2]2}F_{vk}^{0}(x_1)\right]\sin\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right);\\
X_{(2)vk}&=\left[F_{vk}^{2}(x_1)-v\gamma_k^{[2]2}F_{vk}^{0}(x_1)\right]\cos\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right);\\
X_{(3)vk}&=\left[\Psi_{vk}^{2}(x_1)-v\delta_k^{[2]2}\Psi_{vk}^{0}(x_1)\right]\sin\left(\delta_k^{[2]}x_2\right);\\
X_{(4)vk}&=\left[\Psi_{vk}^{2}(x_1)-v\delta_k^{[2]2}\Psi_{vk}^{0}(x_1)\right]\cos\left(\delta_k^{[2]}x_2\right);\\
X_{(5)vk}&=\left[-\gamma_k^{[1]2}\Phi_{vk}^{0}(x_2)+v\Phi_{vk}^{2}(x_2)\right]\sin\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right);\\
X_{(6)vk}&=\left[-\gamma_k^{[1]2}\Phi_{vk}^{0}(x_2)+v\Phi_{vk}^{2}(x_2)\right]\cos\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right);\\
X_{(7)vk}&=\left[-\delta_k^{[1]2}\Omega_{vk}^{0}(x_2)+v\Omega_{vk}^{2}(x_2)\right]\sin\left(\delta_k^{[1]}x_1\right);\\
X_{(8)vk}&=\left[-\delta_k^{[1]2}\Omega_{vk}^{0}(x_2)+v\Omega_{vk}^{2}(x_2)\right]\cos\left(\delta_k^{[1]}x_1\right).
\end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
Y_{(1)vk}&=\left[vF^2(x_1)-\gamma_k^{[2]2}F_{vk}^{0}(x_1)\right]\sin\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right);\\
Y_{(2)vk}&\left[vF_{vk}^{2}(x_1)-\gamma_k^{[2]2}F_{vk}^{0}(x_1)\right]\cos\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right);\\
Y_{(3)vk}&=\left[v\Psi_{vk}^{2}(x_1)-\delta_k^{[2]2}\Psi_{vk}^{0}(x_1)\right]\sin\left(\delta_k^{[2]}x_2\right);\\
Y_{(4)vk}&=\left[v\Psi_{vk}^{2}(x_1)-\delta_k^{[2]2}\Psi_{vk}^{0}(x_1)\right]\cos\left(\delta_k^{[2]}x_2\right);\\
Y_{(5)vk}&=\left[-v\gamma_k^{[1]2}\Phi_{vk}^{0}(x_2)+\Phi_{vk}^{2}(x_2)\right]\sin\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right);\\
Y_{(6)vk}&=\left[-v\gamma_k^{[1]2}\Phi_{vk}^{0}(x_2)+\Phi_{vk}^{2}(x_2)\right]\cos\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right);\\
Y_{(7)vk}&=\left[-v\delta_k^{[1]2}\Omega_{vk}^{0}(x_2)+\Omega_{vk}^{2}(x_2)\right]\sin\left(\delta_k^{[1]}x_1\right);\\
Y_{(8)vk}&=\left[-v\delta_k^{[1]2}\Omega_{vk}^{0}(x_2)+\Omega_{vk}^{2}(x_2)\right]\cos\left(\delta_k^{[1]}x_1\right).
\end{aligned} \quad 8)$$

Funkcji X_{vpk}, Y_{vpk} są funkcjami kształtu, a funkcji M_{11*}, M_{22*} są funkcjami obciążeniowymi momentów zginających w plycie. Wprowadzone tu nowe funkcji bazowe

$$F_{1k}^{2}(x_1)=\frac{\partial^2 F_{1k}^{0}(x_1)}{\partial x_1^2}=\Big[\alpha_{1k}^{[1]2}F_{1k}^{[1]}(x_1)-$$
$$-2\alpha_{1k}^{[1]}\beta_{1k}^{[1]}F_{4k}^{0}(x_1)-\beta_{1k}^{[1]2}F_{1k}^{[1]}(x_1)\Big];$$

$$F_{2k}^{2}(x_1)=\frac{\partial^2 F_{2k}^{0}(x_1)}{\partial x_1^2}=\alpha_{1k}^{[1]2}F_{2k}^{0}(x_1)+$$
$$+2\alpha_{1k}^{[1]}\beta_{1k}^{[1]}F_{3k}^{0}(x_1)-\beta_{pk}^{[1]2}F_{2k}^{0}(x_1);$$

$$F_{3k}^{2}(x_1)=\frac{\partial^2 F_{3k}^{0}(x_1)}{\partial x_1^2}=\alpha_{1k}^{[1]2}F_{3k}^{0}(x_1)-$$
$$-2\alpha_{1k}^{[1]}\beta_{1k}^{[1]}F_{2k}^{0}(x_1)-\beta_{1k}^{[1]2}F_{3k}^{0}(x_1);$$

$$F_{4k}^{2}(x_j)=\frac{\partial^2 F_{4k}^{0}(x_j)}{\partial x_j^2}=\alpha_{1k}^{[1]2}F_{4k}^{0}(x_1)+$$
$$+2\alpha_{1k}^{[1]}\beta_{1k}^{[1]}F_{1k}^{0}(x_1)-\beta_{1k}^{[1]2}(x_1)F_{4k}^{0}(x_1) \quad (29)$$

Nazwijmy je funkcjami bazowymi drugiego rżedu. Podobnie zapisujemy siły tnące

$$Q_1=R_{vpk}T_{vpk}+Q_{1*},\quad Q_2=R_{vpk}G_{vpk}+Q_{2*}, \quad (30)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
T_{(1)vk}&=\left[F^3(x_1)-\gamma_k^{[2]2}F_{vk}^{1}(x_1)\right]\sin\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right);\\
T_{(2)vk}&=-\left[F_{vk}^{3}(x_1)-\gamma_k^{[2]2}F_{vk}^{1}(x_1)\right]\cos\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right);\\
T_{(3)vk}&=\left[\Psi_{vk}^{3}(x_1)-\delta_k^{[2]2}\Psi_{vk}^{1}(x_1)\right]\sin\left(\delta_k^{[2]}x_2\right);\\
T_{(4)vk}&=\left[\Psi_{vk}^{3}(x_1)-\delta_k^{[2]2}\Psi_{vk}^{1}(x_1)\right]\cos\left(\delta_k^{[2]}x_2\right);\\
T_{(5)vk}&=\left[-\gamma_k^{[1]2}\Phi_{vk}^{0}(x_2)+\Phi_{vk}^{2}(x_2)\right]\gamma_k^{[1]}\cos\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right);\\
T_{(6)vk}&\left[-\gamma_k^{[1]2}\Phi_{vk}^{0}(x_2)+\Phi_{vk}^{2}(x_2)\right]\gamma_k^{[1]}\sin\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right);\\
T_{(7)vk}&=\left[-\delta_k^{[1]2}\Omega_{vk}^{0}(x_2)+\Omega_{vk}^{2}(x_2)\right]\delta_k^{[1]}\cos\left(\delta_k^{[1]}x_1\right);\\
T_{(8)vk}&=\left[-\delta_k^{[1]2}\Omega_{vk}^{0}(x_2)+\Omega_{vk}^{2}(x_2)\right]\delta_k^{[1]}\sin\left(\delta_k^{[1]}x_1\right).
\end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
G_{(1)vk}&=\left[F^2(x_1)-\gamma_k^{[2]2}F_{vk}^{0}(x_1)\right]\gamma_k^{[2]}\cos\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right);\\
G_{(2)vk}&=\left[F_{vk}^{2}(x_1)-\gamma_k^{[2]2}F_{vk}^{0}(x_1)\right]\gamma_k^{[2]}\sin\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right);\\
G_{(3)vk}&=\left[\Psi_{vk}^{2}(x_1)-\delta_k^{[2]2}\Psi_{vk}^{0}(x_1)\right]\delta_k^{[2]}\cos\left(\delta_k^{[2]}x_2\right);\\
G_{(4)vk}&=\left[\Psi_{vk}^{2}(x_1)-\delta_k^{[2]2}\Psi_{vk}^{0}(x_1)\right]\delta_k^{[2]}\sin\left(\delta_k^{[2]}x_2\right);\\
G_{(5)vk}&=\left[-\gamma_k^{[1]2}\Phi_{vk}^{1}(x_2)+\Phi_{vk}^{3}(x_2)\right]\sin\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right);\\
G_{(6)vk}&\left[-\gamma_k^{[1]2}\Phi_{vk}^{1}(x_2)+\Phi_{vk}^{3}(x_2)\right]\cos\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right);
\end{aligned}$$

$$G_{(7)vk} = \left[-\delta_k^{[1]2}\Omega_{vk}^1(x_2) + \Omega_{vk}^3(x_2)\right]\sin\left(\delta_k^{[1]}x_1\right);$$
$$G_{(8)vk} = \left[-\delta_k^{[1]2}\Omega_{vk}^1(x_2) + \Omega_{vk}^3(x_2)\right]\cos\left(\delta_k^{[1]}x_1\right). \quad (32)$$

Wprowadzone funkcji sa funkcjami kształtu sił tnących w płycie, a funkcji Q_{1*}, Q_{2*} są funkcjami obciążeniowymi tych sił.

$$F_{1k}^3(x_1) = \frac{\partial^3 F_{1k}^0(x_1)}{\partial x_1^3} = \alpha_{1k}^{[1]}\left(\alpha_{1k}^{[1]2} - 3\beta_{1k}^{[1]2}\right)F_{3k}^0(x_1) + $$
$$+ \beta_{1k}^{[1]}\left(\beta_{pk}^{[1]2} - 3\alpha_{1k}^{[1]2}\right)F_{2k}^0(x_1);$$
$$F_{2k}^3(x_1) = \frac{\partial^3 F_{2k}^0(x_1)}{\partial x_1^3} = \alpha_{1k}^{[1]}\left(\alpha_{1k}^{[1]2} - 3\beta_{1k}^{[1]2}\right)F_{4k}(x_1) - $$
$$- \beta_{1k}^{[1]}\left(\beta_{1k}^{[1]2} - 3\alpha_{1k}^{[1]2}\right)F_{1k}(x_1)$$
$$F_{3k}^3(x_1) = \frac{\partial^3 F_{3k}^0(x_1)}{\partial x_1^3} = \alpha_{1k}^{[1]}\left(\alpha_{1k}^{[1]2} - 3\beta_{1k}^{[1]2}\right)F_{1k}^0(x_1) + $$
$$+ \beta_{1k}^{[1]}\left(\beta_{1k}^{[1]2} - 3\alpha_{1k}^{[1]2}\right)F_{4k}^{[1]}(x_1);$$
$$F_{4k}^3(x_1) = \frac{\partial^3 F_{4k}^0(x_1)}{\partial x_1^3} = \alpha_{1k}^{[1]}\left(\alpha_{1k}^{[1]2} - 3\beta_{1k}^{[1]2}\right)F_{2k}^0(x_1) - $$
$$- \beta_{1k}^{[1]}\left(\beta_{pk}^{[1]2} - 3\alpha_{1k}^{[1]2}\right)F_{3k}^0(x_1). \quad (33)$$

Są funkcjami bazowymi trzeciego rzędu. Określamy uogólnione siły tnace.

$$V_1 = R_{vpk}K_{vpk} + V_{1*}, \quad V_2 = R_{vpk}H_{vpk} + V_{2*}, \quad (34)$$

gdzie

$$K_{(1)vk} = \left[F^2(x_1) - (2-\nu)\gamma_k^{[2]2}F_{vk}^0(x_1)\right]\sin\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right);$$
$$K_{(2)vk} = \left[F_{vk}^2(x_1) - (2-\nu)\gamma_k^{[2]2}F_{vk}^0(x_1)\right]\cos\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right);$$
$$K_{(3)vk} = \left[\Psi_{vk}^2(x_1) - (2-\nu)\delta_k^{[2]2}\Psi_{vk}^0(x_1)\right]\sin\left(\delta_k^{[2]}x_2\right);$$
$$K_{(4)vk} = \left[\Psi_{vk}^2(x_1) - (2-\nu)\delta_k^{[2]2}\Psi_{vk}^0(x_1)\right]\cos\left(\delta_k^{[2]}x_2\right); \quad (35)$$
$$K_{(5)vk} = \left[-\gamma_k^{[1]2}\Phi_{vk}^0(x_2) + (2-\nu)\Phi_{vk}^2(x_2)\right]\sin\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right);$$
$$K_{(6)vk} = \left[-\gamma_k^{[1]2}\Phi_{vk}^0(x_2) + (2-\nu)\Phi_{vk}^2(x_2)\right]\cos\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right);$$
$$K_{(7)vk} = \left[-\delta_k^{[1]2}\Omega_{vk}^0(x_2) + (2-\nu)\Omega_{vk}^2(x_2)\right]\sin\left(\delta_k^{[1]}x_1\right);$$
$$K_{(8)vk} = \left[-\delta_k^{[1]2}\Omega_{vk}^0(x_2) + (2-\nu)\Omega_{vk}^2(x_2)\right]\cos\left(\delta_k^{[1]}x_1\right).$$

$$H_{(1)vk} = \left[(2-\nu)F^2(x_1) - \gamma_k^{[2]2}F_{vk}^0(x_1)\right]\sin\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right);$$
$$H_{(2)vk} = \left[(2-\nu)F_{vk}^2(x_1) - \gamma_k^{[2]2}F_{vk}^0(x_1)\right]\cos\left(\gamma_k^{[2]}x_2\right);$$
$$H_{(3)vk} = \left[(2-\nu)\Psi_{vk}^2(x_1) - \delta_k^{[2]2}\Psi_{vk}^0(x_1)\right]\sin\left(\delta_k^{[2]}x_2\right);$$
$$H_{(4)vk} = \left[(2-\nu)\Psi_{vk}^2(x_1) - \delta_k^{[2]2}\Psi_{vk}^0(x_1)\right]\cos\left(\delta_k^{[2]}x_2\right);$$
$$H_{(5)vk} = \left[-(2-\nu)\gamma_k^{[1]2}\Phi_{vk}^0(x_2) + \Phi_{vk}^2(x_2)\right]\sin\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right);$$
$$H_{(6)vk} = \left[-(2-\nu)\gamma_k^{[1]2}\Phi_{vk}^0(x_2) + \Phi_{vk}^2(x_2)\right]\cos\left(\gamma_k^{[1]}x_1\right);$$
$$H_{(7)vk} = \left[-(2-\nu)\delta_k^{[1]2}\Omega_{vk}^0(x_2) + \Omega_{vk}^2(x_2)\right]\sin\left(\delta_k^{[1]}x_1\right);$$
$$H_{(8)vk} = \left[-(2-\nu)\delta_k^{[1]2}\Omega_{vk}^0(x_2) + \Omega_{vk}^2(x_2)\right]\cos\left(\delta_k^{[1]}x_1\right).$$

Wnioski końcowe. 1. Opracowano model obliczeniowy cienkiej płyty ortotropowej dowolnej konfiguracji przy dowolnych warunkach brzegowych.

2. Stan naprężeń i przemieszczeń w płycie wyraża się przez funkcji bazowe pierwszego i wyższych rzędów i niewiadome parametry, które są stopniami swobody płyty.

3. Liczba niewiadomych parametrów zawsze jest równa liczbie warunków brzegowych (więzów) nałożonych w oddzielnych węzłach na brzegu płyty.

Бібліографічний список

1. Филоненко-Бородич М. М. Некоторые приближенные теории упругого основания. *Ученые записки МГУ*. Вып. 46. 1949. С. 3–18.

2. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коефициентов постели. Москва-Ленинград: Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, 1954.

3. Великанов П. Г. Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании. *Известия Саратовского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика.* Т. 8. 2008. Вып. 1. С. 36–42.

4. Здолбіцька Н. В. Делявський М. В. Напружено-деформований стан тонкої ортотропної плити на трипараметричній пружній основі. *Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки.* 2009. Вип. 1. С. 134–140.

5. Марчук А. В., Пискунов В. Г. К расчету неоднородных плит на упругом полупространстве. *Прикл. механика.* 2002. Вып. 30. № 1. С. 88–94.

6. Галанов Б. А. О решении контактних задач для пластин на упругом полупространстве. *Прикл. механика*. 1987. Т. 23. № 8. С. 24–30.

7. Gryczmański M., Jurczyk P. Modele podłoża gruntowego i ich ocena. *Inżynieria i Budownictwo.* 1995. № 2. С. 98–104.

8. Shanqing Li, Hong Yuan. Green Quasifunction Method for Bending Problem of Clamped Orthotropic Trapezoidal Thin Plates on Winkler Foundation. *Applied Mechanics and Materials.* Vols. 138–139. 2012. P. 705–708.

9. Wei-An Yao, Xiao-Fei Hu, Feng Xiao. Symplectic system based analytical solution for bending of rectangular orthotropic plates on Winkler elastic foundation. Acta Mech. Sin. 2011. 27(6):929–937.

10. Qian Xu, Zhong Yang, Salamat Ullah, Zhang Jinghui, and Yuanyuan Gao. Analytical Bending Solutions of Orthotropic Rectangular Thin Plates with Two Adjacent Edges Free and the Others Clamped or Simply Supported Using Finite Integral Transform Method, Advances in Civil Engineering, Volume 5. 2020. 11 p. URL: https://doi.org/10.1155/2020/8848879.

11. Winkler E., Die Lehre von Der Elastizitat und Festigkeit, Dominicus, Prague, 1867.

12. Делявський М., Здолбіцька Н., Здолбіцький А. Метод конструкційних елементів у розрахунку плит складної конфігурації. Луцьк, 2012. 102 с.

Стаття надійшла 31.08.2021