UDK 539.3

METODA ROZWIĄZYWANIA DWUSKŁADNIKOWYCH KONSTRUKCJI PŁYTOWYCH

M. Delyavskyy, prof. dr hab. inż.
ORCID ID: 0000-0001-6952-0870
Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy
K. Rosiński, mgr inż.
ORCID ID: 0000-0003-3325-1108
Kierownik Zespołu Wycen, Alstal, Grupa Budowlana, Spółka z ograniczoną odpowiedzialnością, Spółka komandytowa Jacewo 76, 88-100 Inowrocław
Yu. Famulyak, dr inż.
ORCID ID: 0000-0003-3044-5513
Lwowski Narodowy Uniwersytet Rolniczy

https://doi.org/10.31734/architecture2021.22.011

Delyavskyy M., Rosiński K., Famulyak Yu. Metoda rozwiązywania dwuskładnikowych konsrukcji płytowych

Przedstawiono oryginalną metodę rozwiązywania zagadnień teorii cienkich płyt ortotropowych na podłożu sprężystym Winklera. W odróżnieniu od metody elementów skończonych zgodnie z opracowanym podejściem konstrukcję płytową dzieli się na duże części zwane elementami konstrukcyjnymi. Rozwiązania konstrukcji sprowadzono do rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego czwartego rzędu.

Rozwiązanie podano w postaci sumy funkcji kształtu ugięcia płyty pomnożonych przez nieznane współczynniki oraz funkcji obciążeniowych. Współczynniki te są stopniami swobody ugięcia płyty. Ich liczba jest zawsze równa liczbie warunków brzegowych zapisanych w oddzielnych węzłach krawędzi. Podobnie otrzymano wyrażenia na przemieszczenia, momenty, siły tnące i uogólnione siły tnące, wyrażone przez własne funkcje kształtu i funkcje obciążeniowe. Zbiór otrzymanych związków tworzy model obliczeniowy konstrukcji płytowej. W procesie rozwiązania obciążenie zewnętrzne podano w postaci podwójnych szeregów trygonometrycznych. Metoda ta rozwinięta została w ramach modelu obliczeniowego i zaimplementowana w autorskim programie obliczeniowym, przy pomocy którego otrzymano rozwiązania płyty dwuskładnikowej na podłożu winklerowskim. W celu ułatwienia zapisu warunków brzegowych wszystkie wyrażenia podano w postaci macierzowej. Wiarygodność otrzymanych rezultatów potwierdzono ich niesprzecznością i porównaniem z rezultatami numerycznymi uzyskanymi w Systemie Lira; podano wykresy zmiany statycznych i kinematycznych wielkości w głównych przekrojach płyty.

W odróżnieniu od metody elementów skończonych opracowana metoda wykorzystuje znacznie mniej równań do rozwiązania konstrukcji płytowych. Na skutek tego, że równania równowagi są spełniane ściśle, metoda wymaga znacznie mniej węzłów dla spełnienia warunków brzegowych. Węzły rozmieszczone są tylko na brzegu płyty.

Metoda zawiera: funkcje bazowe rzędu zerowego i wyższych rzędów, wyrażenia na przemieszczenia, momenty i siły tnące zwane funkcjami stanu.

Słowa kluczowe: Plyta ortotropowa, model obliczeniowy, podłoże sprężyste Winklera, funkcji bazowe różnych rzędów, funkcji kształtu, funkcji obciążeniowe.

Делявський М., Росінський К., Фамуляк Ю. Метод розв'язання двокомпонентних плитних конструкцій

Розроблено метод розрахунку тонких складених ортотропових плит на пружній основі Вінклера. Згідно із запропонованим методом, кожна частина плити (макроелемент) розглядається окремо. Отримано вирази на прогин мікроелемента, тангенціальні переміщення, моменти, поперечні сили і узагальнені поперечні сили. Кожен вираз названо функціями стану. Збір функцій стану описує напружено-деформований стан плити. Кожна функція стану представлена як сума силової функції і координатної функції, помноженої на невідомі коефіцієнти, які є ступенями вільності прогину плити. Їхня загальна кількість завжди дорівнює кількості краєвих умов, записаних в окремих точках на контурі плити. У кожній точці записується по дві краєві умови. Силові функції також містять невідомі параметри іншого виду, за допомогою яких виконуються умови рівноваги на поверхні плити. Координатні функції виражені через базові функції різних порядків: прогин – функцією нульового порядку, переміщення – першого, моменти – другого, а поперечні сили та узагальнені поперечні сили – функцією третього порядку.

З метою ефективного моделювання краєвих умов усі функції стану записано в матричній формі.

Як приклад, отримано розв'язок двокомпонентної плити, складеної з двох прямокутних ортотропних плит, ідеально з'єднаних між собою. Для кожної плити вводиться окрема (локальна) система координат. Частина контуру плити вільно оперта, інша – незакріплена. До кожної плити прикладено окреме навантаження. Для кожної плити будуються незалежні координатні матриці і силові вектори навантаження.

На спільному краю двох плит записуються умови ідеального механічного контакту і в результаті отримано складену матрицю краєвих умов і складений вектор навантаження. Щоби отримати складені матриці і вектори на зовнішніх краях плити, додатково вводяться нульові матриці і нульові вектори навантаження. Представлено графіки зміни прогину, переміщень і моментів у головних перерізах конструкції, які ілюструють ефективність запропонованого методу.

Ключові слова: ортотропна плита, розрахункова модель, пружна основа Вінклера, базові функції різних порядків, функції форми, фукції навантаження.

Deliavskyi M., Rosinskyi K., Famuliak Yu. Method of solving two-component slab structures

One has developed a method for calculating thin composite orthotropic decks based on Winkler elastic foundation. Concerning the proposed method, each part of the deck (macroelement) is considered separately. Expressions on the deflection of the microelement, tangential displacements, moments, transverse forces and generalized transverse forces are obtained. Each expression is called a state function. The collection of state functions describes the stress-deformed state of the deck. Each state function is represented as the sum of the force function and the coordinate function multiplied by unknown coefficients, which are the degrees of freedom of deck deflection. Their total number is always equal to the number of boundary conditions recorded at individual points on the contour of the deck. At each point, two boundary conditions are defined. The force functions also contain unknown parameters of another kind by which the equilibrium conditions on the deck surface are satisfied. Coordinate functions are expressed using basic functions of different orders: deflection – a function of zero order, displacement – the first one, moments – the second one, and transverse forces and generalized transverse forces – a function of the third order.

All state functions are defined in matrix form in order to effectively model the boundary conditions.

As an example, the solution of a two-component deck composed of two rectangular orthotropic decks perfectly connected to each other is obtained. A separate (local) coordinate system is introduced for each deck. Part of the contour of the deck is loosely supported, the other is not fixed. A separate load is applied to each deck. Independent coordinate matrices and force load vectors are constructed for each deck.

One records the conditions of ideal mechanical contact on the common edge of the two decks, and as a result one obtains a composite matrix of boundary conditions and a composite load vector. Zero matrices and zero load vectors are additionally introduced so as to obtain composite matrices and vectors on the outer edges of the deck. Graphs of changes in deflection, displacements and moments in the main sections of the structure are presented, which illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: orthotropic deck, calculation model, Winkler elastic foundation, basic functions of different orders, shape functions, load functions.

Wstęp. W ostatnich latach opracowano wiele metod swobodnych od niedostatków klasycznych metod numerycznych, nazwane metodami analitycznie – numerycznymi. W tej grupie część równań teorii płyt rozwiązuje się w sposób analityczny, a pozostałą część przy pomocy procedur numerycznych. Oddzielnę grupę tworzą metody bezsiatkowe do której należy opracowana metoda.

Analiza ostatnich badań i publikacji. W chwili obecnej ogólnie przyjętą metodą rozwiązywania konstrukcji płytowych na podłożu sprężystym jest metoda elementów skończonych (MES) [2]. Rozróżniają dwa rodzaje podłoża: podłoże analogowe [1; 3–6] i przestrzeń sprężysta [7; 8]. Ich analiza podana w artykule [9]. W danym artykule zaproponowano inną metodę rozwiązywania konstrukcji płytowych nazwaną metodę elementów konstrukcyjnych (MEK) [10]. Wymienione metody różnią się miedzy sobą: sposobem dyskretyzacji konstrukcji, podejściem do rozwiązywania problemu, sposobem rozwiązania konstrukcji, sposobem wyboru węzłów, dokładnością rozwiązywania.

Materiał podstawowy. W monografii [10] opracowano model atematyczny płyty ortotropowej na podłożu sprężystym Winklera.

$$w = R_{v\,pk} W_{v\,pk} + w_*, v = 1 \div 4;\ p = 1 \div 8;\ k = 1 \div \infty. \quad (1)$$

$$u_1 = R_{v\,pk} U_{v\,pk} + u_{1*},\ \ u_2 = R_{v\,pk} V_{v\,pk} + u_{2*}, \quad (2)$$

$$M_{11} = R_{v\,pk} X_{v\,pk} + M_{11*},\ \ M_{22} = R_{v\,pk} Y_{v\,pk} + M_{22*}, \quad (3)$$

$$Q_1 = R_{v\,pk} T_{v\,pk} + Q_{1*},\ \ Q_2 = R_{v\,pk} G_{v\,pk} + G_{2*}, \quad (4)$$

$$V_1 = R_{v\,pk} K_{v\,pk} + V_{1*},\ \ V_2 = R_{v\,pk} H_{v\,pk} + V_{2*}, \quad (5)$$

tutaj w jest ugięciem płyty, u_1 i u_2 są to przemieszczenia poziome, M_{11}, M_{22} – momenty zginające i skrecające, Q_1 i Q_2 siły tnące, a V_1 i V_2 – ogólnione siły tnące.

W podanych powyżej wzorach funkcji W, Q, V i t.d. nazwane funkcjami kształtu ugięcia, pzemieszczeń poziomych, momentów i sił tnących a wielkości z (*) funkcjami obciążeniowymi odpowiednich wielkości.

Podstawą modelu są funkcji bazowe rzędu zerowego, określające ugiecie plyty.

$$F_{1k}^{0}(x_1) = \frac{\cosh\left(\alpha_{1k}^{[1]} x_1\right)\cos\left(\beta_{1k}^{[1]} x_1\right)}{\exp\left(\alpha_{1k}^{[1]} a_1\right)};$$

$$F_{2k}^{0}\left(x_1\right)=\frac{\cosh\left(\alpha_{1k}^{[1]}x_1\right)\sin\left(\beta_{1k}^{[1]}x_1\right)}{\exp\left(\alpha_{1k}^{[1]}a_1\right)};$$

$$F_{3k}^{0}\left(x_1\right)=\frac{\sinh\left(\alpha_{1k}^{[1]}x_1\right)\cos\left(\beta_{1k}^{[1]}x_1\right)}{\exp\left(\alpha_{1k}^{[1]}a_1\right)};$$

$$F_{4k}^{0}\left(x_1\right)=\frac{\sinh\left(\alpha_{1k}^{[1]}x_1\right)\sin\left(\beta_{1k}^{[1]}x_1\right)}{\exp\left(\alpha_{1k}^{[1]}a_1\right)}. \qquad (6)$$

Przemieszczenia poziome wyrażone są przez funkcji bazowe rzędu pierwszego, momenty – przez funkcji bazowe rzędu drugiego, a siły tnące i uogólnione siły tnące – prze funkcji bazowe rzędu trzeciego.

Każda funkcja bazowa rzędu wyższego określa się przez funkcji bazowe rzędu niższego. W celu ułatwienia zapisu warunków brzegowych otrzymane wyrażenia zapisujemy w postaci macierzowej [10].

$$w=\left[\left[W\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+W^{*},$$

$$u_1=\left[\left[U\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+U^{*},\ u_2=\left[\left[V\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+V^{*},$$

$$M_{11}=\left[\left[X\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+X^{*},\ M_{22}=\left[\left[Y\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+Y^{*},$$

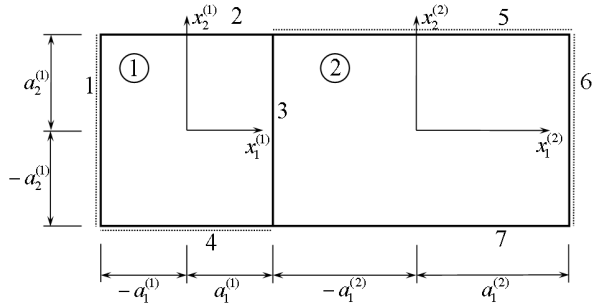
$$M_{12}=\left[\left[Z\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+Z^{*},$$

$$Q_1=\left[\left[T\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+T^{*},\ Q_2=\left[\left[G\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+G^{*},$$

$$V_1=\left[\left[K\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+K^{*},$$

$$V_2=\left[\left[H\right]\right]\left\{\left\{R\right\}\right\}+H^{*}. \qquad (7)$$

Jako przykład rozważmy płytę dwuskładnikową złożoną z dwóch płyt ortotropowych prostokątnych o jednakowej grubości $h=0.2m$ i szerokości a_2 z różnymi własnościami mechanicznymi (rys. 1).



Rys. 1. Płyta prostokątna złożona z dwóch makroelementów.

Dla każdej płyty wprowadzamy lokalny układ współrzędnych $x_1^{(k)}\,x_2^{(k)},\ k=1,2$ oraz numerację płyty i krawędzi jak pokazano na rysunku 1. Linii punktowe oznaczaja krawędzi swobodnie podparte, linii nie punktowe – krawędzi swobodne.

Wymiary każdej płyty wybrane odpowiednio $2a_1^{(1)}=4m,\ 2a_2^{(1)}=4m$, $2a_1^{(2)}=6m,\ 2a_2^{(2)}=4m$. Każdy element konstrukcji znajduje się pod obciążeniem stałym $q^{(1)}=100k\,H/m^2$, $q^{(2)}=200k\,H/m^2$. Wskaźnik górny jest numerem płyty. Zapiszmy warunki brzegowe na krawędziach płyty.

Na krawędzi wspólnej:

$$\begin{aligned}
&w^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)=w^{(2)}\left(-a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right);\\
&M_{11}^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)=M_{11}^{(2)}\left(-a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right);\\
&u_1^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)=u_1^{(2)}\left(-a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right);\\
&Q_1^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)=Q_1^{(2)}\left(-a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right).
\end{aligned} \qquad (8)$$

Na krawędzi swobodnie podpartej 1:

$$w^{(1)}\left(-a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)=0;\ M_{11}^{(1)}\left(-a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)=0. \qquad (9)$$

Na krawędzi swobodnie podpartej 6:

$$w^{(2)}\left(a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right)=0;\ M_{11}^{(2)}\left(a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right)=0. \qquad (10)$$

Na krawędzi swobodnie podpartej 4:

$$w^{(1)}\left(x_1^{(1)},-a_2^{(1)}\right)=0;\ M_{22}^{(1)}\left(x_1^{(1)},-a_2^{(1)}\right)=0. \qquad (11)$$

Na krawędzi swobodnie podpartej 5:

$$w^{(2)}=\left(x_1^{(2)},a_2^{(2)}\right)=0;\ M_{22}^{(2)}\left(x_1^{(2)},a_2^{(2)}\right)=0. \qquad (12)$$

Na krawędzi swobodnie podpartej 4:

$$w^{(1)}\left(x_1^{(1)},-a_2^{(1)}\right)=0;\ V_2^{(1)}\left(x_1^{(1)},-a_2^{(1)}\right)=0. \qquad (13)$$

Na krawędzi swobodnej 2:

$$w^{(2)}\left(x_1^{(2)},-a_2^{(2)}\right)=0;\ V_2^{(2)}\left(x_1^{(2)},-a_2^{(2)}\right)=0. \qquad (14)$$

Obliczenia numeryczne wykonano dla takich charakterystyk materiału: beton marki B15, moduł Youngę i współczynnik Poissona którego wynoszą odpowiednio $E_b=2.3\cdot10^4\,MN/m^2$, $\nu_b=0.2$, moduł Youngę prętów stalowych równa się $E_s=2\cdot10^5\,MN/m^2$, zawartość objętościowa prętów w pierwszej płycie równa się $\mu^{(1)}=0.1\%$, w drugiej płycie – $\mu^{(2)}=0.5\%$. Odległość pręta od dolnej powierzchni płyty jest $0.03m$. Do obliczeń numerycznych wybrano taki wartości zastępcze sztywnością płyty

$$D_{11}^{(1)}=D_{22}^{(1)}=1.6\cdot10^7\,H/m^2;\ D_{11}^{(2)}=D_{22}^{(2)}=1.7\cdot10^7\,H/m^2;$$

$$D_{12}^{(1)}=3.2\cdot10^6\,H/m^2;\ D_{12}^{(2)}=3.4\cdot10^6\,H/m^2;$$

$$D_{66}^{(1)}=6.4\cdot10^6\,H/m^2;\ D_{66}^{(2)}=6.8\cdot10^6\,H/m^2; \qquad (15)$$

które zostały określone przy pomocy wzorów Hubera [11].

Do obliczeń wybrano 28 punktów węzłowych (przy obliczeniach MEK) i odpowiednio 1071 węzeł oraz 1000 elementów skończonych przy obliczeniach (MES). Przy rozwiązaniu konstrukcji MEK na każdym brzegu płyty wybrano po cztery punkty węzłowe. Na krawędziach zewnętrznych w każdym punkcie mamy do wykonania po dwa warunki

brzegowe, na krawędzi wspólnej 3 – po cztery warunki. Ogólna liczba warunków brzegowych równa się 64. Wspóółczynnik sztywności podłoża wybrano jako $K_0 = 5\cdot 10^7 N/m^3$.

Dla rozważanej płyty dwuskładnikowej budujemy złożone macierze kształtu oraz złożone funkcji obciążeniowe. Oznaczmy przez $Z(x_1,x_2)$ wartość statyczną (momenty i siły tnące) lub kinematyczną (ugięcie i przemieszczenia poziome) i zapiszemy ją w postaci macierzowej

$$Z(x_1,x_2) = [\mathrm{Z}]\{\mathrm{R}\} + Z_*(x_1,x_2). \qquad (16)$$

Zapiszmy najpierw warunek ciągłości tej wielkości na wspólnej krawędzi 3.

$$\mathrm{Z}^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right) = \mathrm{Z}^{(2)}\left(-a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right). \qquad (17)$$

Przepiszmy ten warunek w postaci macierzowej

$$\left[\mathrm{Z}^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)\right]\{\mathrm{R}\}^{(1)} + \left\{\mathrm{Z}_*^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)\right\} = \\ = \left[\mathrm{Z}^{(2)}\left(-a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right)\right]\{\mathrm{R}\}^{(2)} + \left\{\mathrm{Z}_*^{(2)}\left(-a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right)\right\}. \qquad (18)$$

Lub

$$\left[\left[\mathrm{Z}^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)\right]\left[-\mathrm{Z}^{(2)}\left(-a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right)\right]\right]\begin{Bmatrix}\{\mathrm{R}\}^{(1)}\\ \{\mathrm{R}\}^{(2)}\end{Bmatrix} + \\ + \left\{\left\{\mathrm{Z}_*^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)\right\} - \left\{\mathrm{Z}_*^{(2)}\left(-a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right)\right\}\right\} = 0. \qquad (19)$$

Wprowadzamy nowe oznaczenia

$$[\mathrm{Z}(x_2)]\big|_3 = \left[\left[\mathrm{Z}^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)\right]\left[-\mathrm{Z}^{(2)}\left(-a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right)\right]\right], \qquad (20)$$

$$\{\mathrm{R}\} = \left\{\left\{\mathrm{R}^{(1)}\right\},\left\{\mathrm{R}^{(2)}\right\}\right\}^*,$$

$$\mathrm{Z}_*(x_2)\big|_3 = \left\{\left\{\mathrm{Z}_*^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)\right\} - \left\{\mathrm{Z}_*^{(2)}\left(-a_1^{(2)},x_2^{(2)}\right)\right\}\right\}, \qquad (21)$$

Które nazwijmy złożonym wektorem nieznanych parametrów układu oraz złożona macierzą kształtu i złożoną funkcją obciążeniową na krawędzi 3. W terminach wprowadzonych funkcji warunek (20) zapisujemy w postaci:

$$\left[\mathrm{Z}(x_2)\big|_3\right]\{\mathrm{R}\} + \left\{\mathrm{Z}_*(x_2)\big|_3\right\} = 0. \qquad (22)$$

Załóżmy teraz, że na krawędzi zewnętrznej na przykład $x_1^{(1)} = a_1^{(1)}$ zadane jest znaczenie wielkości $Z^{(1)}(a_1,x_2) = \mathrm{Z}_p^{(1)}(a_1,x_2)$. Zapiszmy ten warunek w postaci macierzowej

$$\left[\mathrm{Z}^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)\right]\{\mathrm{R}\}^{(1)} + \left\{\mathrm{Z}_*^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)\right\} = \\ = [\mathrm{O}]\{\mathrm{R}\}^{(2)} + \{\mathrm{O}\} = \left\{\mathrm{Z}_p^{(1)}(a_1,x_2)\right\}. \qquad (23)$$

I przepisujemy ten warunek tak:

$$\left[\mathrm{Z}(x_2)\big|_1\right]\{\mathrm{R}\} + \left\{\mathrm{Z}_*(x_2)\big|_1\right\} = 0. \qquad (24)$$

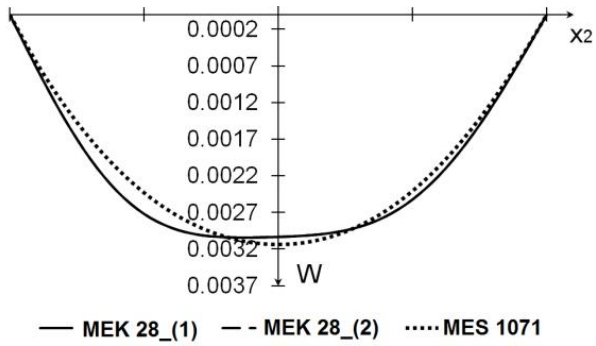
Gdzie

$$\left[\mathrm{Z}(x_2)\right]\big|_1 = \left(\left[\mathrm{Z}^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)\right][\mathrm{O}]\right). \qquad (25)$$

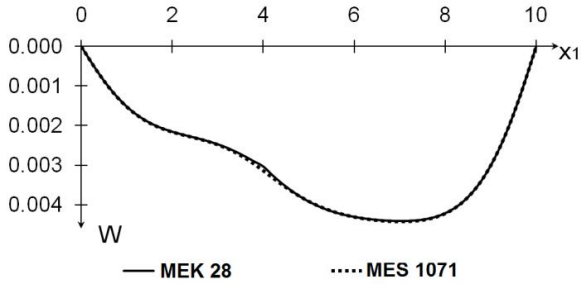
$$\left[\mathrm{Z}^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)\right]\{\mathrm{R}\}^{(1)} + \left\{\mathrm{Z}_*^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)\right\} = \\ = [\mathrm{O}]\{\mathrm{R}\}^{(2)} + \{\mathrm{O}\} = \left\{\mathrm{Z}_p^{(1)}(a_1,x_2)\right\} \qquad (26)$$

$$\{\mathrm{Z}_*(x_2)\}\big|_1 = \left\langle\left\{\mathrm{Z}_*^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right) - \{\mathrm{O}\} - \mathrm{Z}_p^{(1)}\left(a_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)\right\}\right\rangle \qquad (27)$$

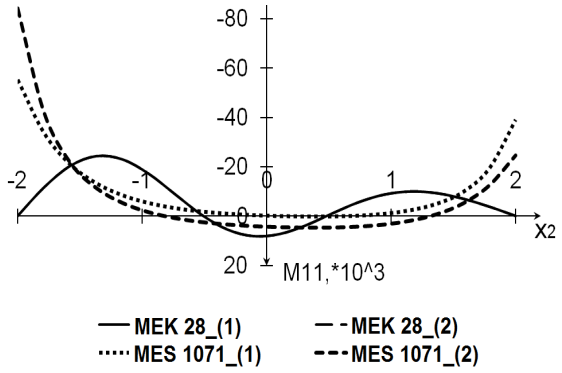
Na rysunku 2 podano wykres ugięcia płyty na linii styku dwóch elementów konstrukcyjnych (przekrój $x_1 = 4$); a na rysunku 3 – ugięcia płyty w przekroju środkowym ($x_2 = 0$). Wykresy uzyskane przy pomocy MEK podane dla pierwszej płyty linia ciągła (oznaczenia MEK28_(1) a dla drugiej płyty linia przerwaną (oznaczenia MEK28_(2)). Linia punktowa dotyczy wyników uzyskanych metodą elementów skończonych (MES). Liczba 28 oznacza ilość punktów węzłowych na brzegu elementu konstrukcyjnego.



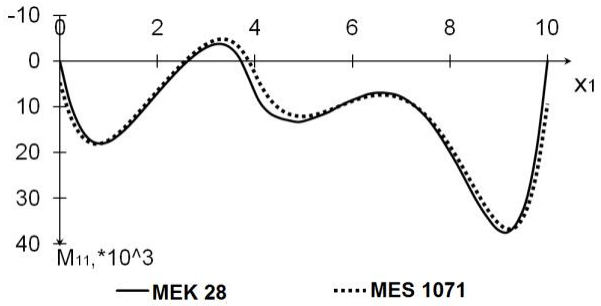
Rys. 2. Ugięcie płyty na linii styku dwóch plyt $(x_1 = 4)$.



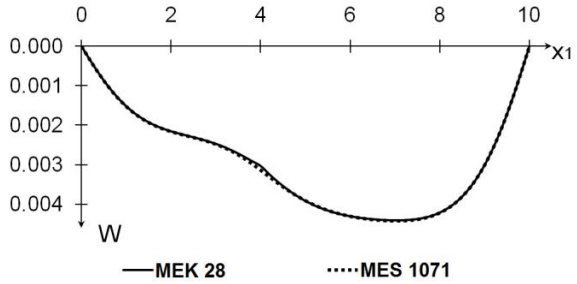
Rys. 3. Przekrój powierzchni ugięcia płyty płaszczyzną $(x_2 = 0)$.



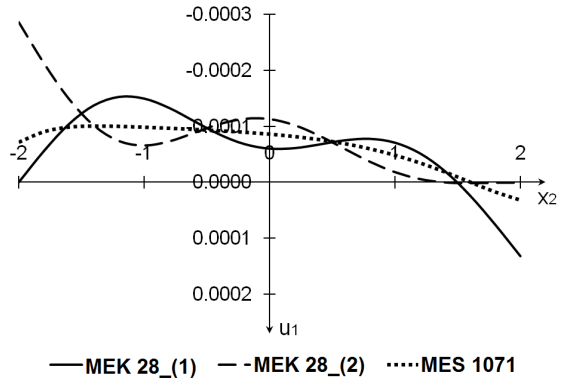
Rys. 4. Wykresy zmiany momentu M_{11}.



Rys. 5. Wykresy zmiany momentu M_{11} *w przekroju* $(x_2 = 0)$.



Rys. 6. Przekrój powierzchni ugięcia płaszczyzną $(x_2 = 0)$.



Rys. 7. Wykres zamiany przemieszczeń u_1 *na linii styku dwóch płyt.*

Na rysunku 5 podane wykresy zmiany momentu w przekroju środkowym M_{11} $(x_2 = 0)$.

Na rys. 4 – podano wykresy zmiany momentu zginającego M_{11} na linii styku dwóch elementów konstrukcyjnych uzyskane metodą elementów konstrukcyjnych oraz elementów skończonych. Wartości momentu uzyskane różnymi metodami różnią się istotnie. Oprócz tego na brzegu swobodnie podpartym wartość momentu nie spełnia zerowy warunek brzegowy.

Wnioski końcowe. Opracowano analitycznie – numeryczną metodę rozwiazywania cienkiej dwuskładnikowej płyty ortotropowej na podłożu sprężystym Winklera.

1. Otrzymano podstawowe wyrażenia na ugiecie, przemieszczenia poziome, momenty i siły tnące wyrażone przez własne funkcji kształtu i funkcji obciążeniowe.
2. W celu ułatwienia zapisu warunków brzegowych wszystkie wyrażenia podano w postaci macierzowej.
3. Warunki brzegowe zapisane w oddzielnych punktach na brzegu płyty nazwanych węzłami krawędziowymi.
4. Podano wykresy zmiany statycznych i kinematycznych wielkości w głównych przekrojach płyty.

Бібліографічний список

1. Winkler E., Die Lehre von Der Elastizitat und Festigkeit, Dominicus, Prague, 1867.

2. A The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, 7th ed.; Zienkiewicz, O., Taylor, R., Fox, D., Eds.; Butterworth-Heinemann: Oxford, UK, 2014.

3. Филоненко-Бородич М. М. Некоторые приближенные теории упругого основания. *Ученые записки МГУ.* 1949. Вып 46. С. 3–18.

4. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коефициентов постели. Москва-Ленинград, Гос. Изд-во литературы по строительству и архитектуре, 1954.

5. Великанов П. Г. Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании. *Известия Саратовского университета.* Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Вып. 1, т. 8. С. 36–42.

6. Здолбіцька Н. В., Делявський М. В. Напружено-деформований стан тонкої ортотропної плити на трипараметричній пружній основі. *Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки.* 2009. Вип. 1. С. 134–140.

7. Марчук А. В., Пискунов В. Г. К расчету неоднородных плит на упругом полупространстве. *Прикл. механика.* 2002. Т. 30, № 1. С. 88–94.

8. Галанов Б. А. О решении контактних задач для пластин на упругом полупространстве. *Прикл. Механика.* 1987. Т. 23, № 8. С. 24–30.

9. Gryczmański M., Jurczyk P. Modele podłoża gruntowego i ich ocena. *Inżynieria i Budownictwo.* 1995. № 2. P. 98–104.

10. Делявський М., Здолбіцька Н., Здолбіцький А. Метод конструкційних елементів у розрахунку плит складної конфігурації. Луцьк, 2012. 102 с.

11. Delyavskyy M., Rosiński K., Zdolbicka N., Bilash O. Macroelement analysis of thin orthotropic polygonal plate resting on the elastic Winkler's foundation Cite as: AIP Conference Proceedings 2077, 020014 (2019); https://doi.org/10.1063/1.5091875 Published Online: 21 February Huber M. T.: Teoria płyt prostokątnie różnokierunkowych. Lwów: Arch. Tow. Nauk.

Стаття надійшла 31.08.2021