АНАЛІТИЧНІ ТА ЧИСЛОВІ МЕТОДИ В МЕХАНІЦІ ТА ФІЗИЦІ РУЙНУВАННЯ БУДІВЕЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ

УДК 539.3

РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ НА ПОВЕРХНІ ПОРОЖНИНИ У ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Т. Бубняк, к. ф.-м. н.

ORCID ID: 0000-0002-2814-8571

Львівський національний аграрний університет

<https://doi.org/10.31734/architecture2020.21.005>

Бубняк Т. Розподіл напружень на поверхні порожнини у трансверсально-ізотропному середовищі

Розглянуто просторову задачу теорії пружності про розподіл напружень у трансверсально-ізотропному середовищі, яке містить таке саме включення, на межі розділу фаз. Дослідження показують, що на межі розділу напруження мають локальний характер і швидко згасають з віддаленням від поверхні включення.

У механіці деформованого твердого тіла важливе місце посідають просторові задачі теорії пружності й термопружності стосовно розподілу напружень в околі неоднорідностей, які мають конструктивні композити. Щодо міцності таких матеріалів, їхнє виробництво потребує інформації про досягнення компонентами напружень екстремальних значень у певних зонах (зонах руйнування). Таких екстремальних значень досягають, як правило, на межі розділу фаз.

Важлива проблема отримання достовірної інформації про розподіл напружень у матеріалах чи елементах конструкцій з урахуванням реальної картини міжфазної взаємодії, що пов'язано з використанням ефективних методів розв'язку просторових задач теорії пружності.

Дослідження просторових задач термопружності для однорідних ізотропних та анізотропних тіл у загальній постановці пов'язане з великими математичними труднощами через складність побудови розв'язку системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, який задовольняє певні граничні умови.

Одним із ефективних методів розв'язку задач теорії пружності є метод Фур'є, який базується на представленні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Особливістю застосування методу Фур'є є використання різних представлень розв'язку рівнянь Ляме через гармонічні функції, що дає змогу шукати розв'язок у вигляді рядів.

Розглянуто задачу про розподіл напружень необмеженого трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне, відносно механічних і теплових властивостей, включення у формі стиснутого сфероїда за лінійного одноосного нагріву. На межі розділу фаз пропонуються умови неідеального механічного і теплового контактів.

Розв'язок просторової задачі за заданих граничних умов на поверхні включення лінійного силового й температурного полів зводиться до розвинення шуканих потенціальних функцій у тригонометричні ряди за приєднаними функціями Лежандра першого і другого родів.

Задовольняючи граничні умови, отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу, яка має збіжний розв'язок.

Аналіз результатів дослідження показує, що на поверхні трансверсально-ізотропного середовища концентрація меридіальних і кругових напружень швидко згасає від стискальних до розтягувальних з переміщенням від полюса до екватора.

Ключові слова: потенціальні функції, трансверсально-ізотропне середовище, неідеальний контакт, сфероїд, поля напружень і термонапружень.

Bubniak T. Stress distribution on the surface caves in a transversal-isotropic medium

A spatial problem of the theory of elasticity about stress distribution in a transversal-isotropic medium containing the same inclusion at the boundary of the phase separation is considered. Studies show that, at the interface, voltages are local in nature and rapidly attenuate with the distance from the inclusion surface.

In the mechanics of a deformed solid body, spatial problems of the theory of elasticity and thermal elasticity, which are related to the stress distribution in the neighborhood of inhomogeneities with structural composites, occupy an important place. Considering the strength of such materials, their production requires information on the achievement of stress components of extreme values in certain zones (zones of destruction). Such extreme values are generally reached at the interface.

The problem of obtaining reliable information about stress distribution in materials or structural elements is of great importance, taking into account the real picture of interfacial interaction, which is related to the use of effective methods of solving spatial problems of elasticity theory.

The study of spatial problems of thermoelasticity for homogeneous isotropic and anisotropic bodies in general formulation is fraught with great mathematical difficulties because of the complexity of constructing the solution of a partial differential equation that satisfies certain boundary conditions.

The Fourier method is one of the effective methods for solving the problems of elasticity theory. It is based on the representation of general solutions of equilibrium equations through potential functions. A feature of the Fourier method is the use of different representations of the Lamé equation solution through harmonic functions, which allows searching for a series solution.

The paper deals with the problem of stress distribution of an unlimited transversely isotropic medium, which contains anisotropic, relatively mechanical and thermal properties, inclusion in the form of a compressed spheroid with linear uniaxial heating. At the boundary of the phase section, conditions of non-perfect mechanical and thermal contacts are proposed.

The solution of the spatial problem under given boundary conditions on the surface of inclusion of the linear force and temperature fields is reduced to the development of the sought potential functions in trigonometric series by the connected Legendre functions of the first and second genera.

By satisfying the boundary conditions, an infinite system of linear algebraic equations to determine the coefficients of a convergent solution is obtained.

The analysis of the results of the study shows that on the surface of the transversely isotropic medium, the concentration of meridional and circular stresses rapidly decays from compression to tensile with movement from the pole to the equator.

Key words: potential functions, transversal-isotropic medium, non-ideal contact, spheroid, stress fields and thermal stresses.

Постановка проблеми. Багато конструкцій сучасних споруд містять деталі, виготовлені з анізотропних матеріалів: різних склопластиків, пластмас і т. ін. Часто ці деталі є конструкціями із порожнинами. Після навантаження в деталях виникає нерівномірне поле напружень, величину якого потрібно знати для розрахунку деталей на міцність.

У механіці деформованого твердого тіла важливе місце посідають просторові задачі теорії пружності й термопружності стосовно розподілу напружень в околі неоднорідностей, які мають конструктивні композити. Щодо міцності таких матеріалів, їхнє виробництво потребує інформації про досягнення компонентами напружень екстремальних значень у певних зонах (зонах руйнування). Таких екстремальних значень досягають, як правило, на межі розділу фаз [3].

Поява неоднорідностей в одних випадках зумовлена технологією виробництва, в інших – неоднорідність вводять для досягнення оптимальної міцності конструкції.

Важливою є проблема отримання достовірної інформації про розподіл напружень у матеріалах чи елементах конструкцій з урахуванням реальної картини міжфазної взаємодії, що пов'язано з використанням ефективних методів розв'язку просторових задач теорії пружності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження просторових задач термопружності для однорідних ізотропних та анізотропних тіл у загальній постановці пов'язане з великими математичними труднощами через складність побудови розв'язку системи диференціальних рівнянь у

частинних похідних, який задовольняє певні граничні умови.

Одним із ефективних методів розв'язку задач теорії пружності є метод Фур'є [4], який базується на представленні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Особливістю застосування методу Фур'є є використання різних представлень розв'язку рівнянь Ляме через гармонічні функції, що дає змогу шукати розв'язок у вигляді рядів.

Важливі результати в розв'язку задач теорії пружності отримані у працях Ю. М. Коляно, В. Л. Рвачова, І. О. Мотовиловця, К. В. Солянік-Красса, Я. С. Підстригала, Ю. М. Подільчука та багатьох інших учених, в яких побудовані точні розв'язки просторових задач теорії пружності і статичної термопружності у сферичній, циліндричній, сфероїдальній, параболічній та інших системах координат [3; 4].

Постановка завдання. Наше завдання – дослідити розподіл меридіальних і кругових напружень на поверхні сфероїдальної порожнини за дії лінійного силового й температурного поля. На основі отриманих результатів побудувати графічні залежності концентрації напружень та виокремити особливості розподілу напружень.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо задачу про розподіл напружень необмеженого трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне, відносно механічних і теплових властивостей, включення у формі стиснутого сфероїда за лінійного одноосного нагріву. На межі

розділу фаз пропонуються умови неідеального механічного і теплового контактів [5].

Побудова розв'язку просторових задач із використанням ефективних методів їх чисельної реалізації – актуальна і важлива проблема.

Ефективним методом розв'язку просторових задач теорії пружності є метод Фур'є, який базується на представленні загального розв'язку рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Цей метод дає змогу шукати розв'язок у вигляді рядів, наприклад, за функціями Лежандра, або інтегралів від гармонічних функцій із невідомими коефіцієнтами чи густинами.

Розв'язок просторової задачі за заданих граничних умов на поверхні включення лінійного силового й температурного полів зводиться до розвинення шуканих потенціальних функцій у тригонометричні ряди за приєднаними функціями Лежандра першого і другого родів [1; 5].

$$\Phi_j(x, y, z_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \frac{n+m}{i(2n+1)} \left\{ \frac{P_{n+1}^{(m)}(p_j) Q_{n+1}^{(m)}(i\bar{q}_j)}{(n+m+1)(n+m)} - \frac{P_{n-1}^{(m)}(p_j) Q_{n-1}^{(m)}(i\bar{q}_j)}{(n-m+1)(n-m)} \right\} \left\{ a_{nm}^{(j)} \cos m\varphi + b_{nm}^{(j)} \sin m\varphi \right\},$$

$$(j=1, 2, 3), \quad (1)$$

де $a_{nm}^{(j)}, b_{nm}^{(j)}$ – поки що невідомі сталі, які знаходять із граничних умов.

Для знаходження загального розв'язку рівнянь рівноваги [3] у випадку дійсних різних коренів характеристичного рівняння, складеного за коефіцієнтами системи рівнянь рівноваги, використовують представлення через потенціальні функції [3; 4].

$$u = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y};$$

$$v = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}; \quad (2)$$

$$w = k_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}.$$

У (2) коефіцієнти k_1, k_2 – виражаються через коефіцієнти рівнянь рівноваги та корені характеристичного рівняння.

Задовольняючи граничні умови, отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу, яка має збіжний розв'язок [1; 5].

Розрахунок напруженого стану трансверсально-ізотропного середовища зі сфероїдальною

порожниною під дією лінійного силового поля проводився в умовах неідеального контакту [2] для матеріалу із пружними характеристиками: середовище – (10^{10} н/м^2) $c_{11} = 20,65$ $c_{12} = 15,25$; $c_{13} = 10,45$; $c_{23} = 35,15$; $c_{44} = 8,45$. Усі інші $c_{ij} = 0$ для середовища. Для порожнини всі $c_{ij} = 0$.

Локальний характер напружено-деформівного стану на поверхні трансверсально-ізотропного середовища із включенням у вигляді порожнини показано на рисунку. Концентрація напружень швидко згасає від стискальних до розтягувальних з переміщенням від полюса до екватора.

Рис. Розподіл концентрації напружень

Висновки. На основі аналізу отриманих числових результатів виявлено такі механічні особливості, зумовлені порушенням умов спаю на границі розділу фаз:

- наявність порожнини у формі стиснутого сфероїда в пружному трансверсально-ізотропному середовищі за неідеального механічного контакту суттєво впливає на концентрацію напружень переважно на поверхні і в деякому околі розділу фаз;
- концентрація кругових і меридіальних напружень змінюється від стискальних на полюсі $\theta = 0$, до розтягувальних на екваторі $\theta = 90^\circ$.

Бібліографічний список

1. Бубняк Т. І. Концентрація нормальних напружень у включенні за дії лінійного температурного поля. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2018. № 19. С. 46–48.

2. Бубняк Т. І. Про несучу здатність композитів в умовах всестороннього напруженого стану. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2019. № 20. С. 20–22.

3. Подильчук Ю. Н. Граничные задачи статики упругих тел. *Пространственные задачи теории упругости и пластичности*: в 5 т. Київ: Наук. думка, 1984. Т. 1. 303 с.

4. Соколовський Я. І., Бубняк Т. І. Напряженное состояние трансверсально-изотропной среды со сфероидальным включением при неидеальном механическом контакте. *Теоретическая и прикладная механика*. 1995. Вып. 25. С. 17–26.

5. Соколовський Я. І., Бубняк Т. І. Просторова задача трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальному механічному контакті. *Доп. НАН України*. 1996. № 9. С. 45–50.

Стаття надійшла 28.01.2020