

УДК 539.3

ПРО НЕСУЧУ ЗДАТНІСТЬ КОМПОЗИТИВ В УМОВАХ ВСЕСТОРОННЬОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Т. Бубняк, к. ф.-м. н.

ORCID ID: 0000-0002-2814-8571

Львівський національний аграрний університет

<https://doi.org/10.31734/architecture2019.20.020>

Бубняк Т. Про несучу здатність композитів в умовах всестороннього напруженого стану

Застосування у будівництві конструкцій із композитів неможливе без точного визначення їх несучої здатності та вміння надійно передбачати граничні навантаження кожного конкретного композита в умовах експлуатації. Такі проблеми належать до просторових задач теорії пружності про розподіл напружень деформованого твердого тіла, яке містить різні неоднорідності. Елементи силових конструкцій складаються із композитів, виготовлених із різноорієнтованих однонаправлених шарів, або включень, що мають форму, наприклад, сфероїдів, вкладених у певній послідовності за товщиною. Отримання достовірної і повної інформації про розподіл напружено-деформованого стану в елементах конструкцій пов'язано з використанням ефективних аналітичних і чисельних методів розв'язку задач теорії пружності.

З урахуванням вимог сучасної техніки силова конструкція із композиту має складатись із надійних елементів, мати допустимий термін експлуатації і бути малочутливою до настання граничного терміну експлуатації. У зв'язку з розвитком і впровадженням нових конструктивних матеріалів виникла необхідність навчитися оцінювати їх міцнісні властивості за різних видів навантаження.

Ефективним методом розв'язку просторових задач теорії пружності для однозв'язних просторових тіл є метод Фур'є, який базується на представленні рівнянь рівноваги через потенціальні функції, що розкладаються в ряди за приєднаними функціями Лежандра.

Розв'язано задачу про розподіл кругових і меридіальних напружень за дії всестороннього розтягу тіла, яке містить сфероїдалне включення в умовах неідеального механічного і теплового контакту залежно від геометрії включення. На основі чисельного аналізу досліджено концентрацію напружень у середовищі та включенні за всестороннього розтягу за дії лінійного поля. Виявлені механічні особливості полів напружень. Отримано розподіл концентрацій кругових і меридіальних напружень.

Встановлено, що із збільшенням відношення півосей сфероїда (b – велика, a – мала півосі) за дії всестороннього розтягу концентрація кругових напружень σ_ϕ значно зростає, а меридіальних напружень σ_θ спадає із збільшенням відношення $\frac{b}{a}$.

Ключові слова: потенціальні функції, трансверсально-ізотропне тіло, неідеальний контакт, сфероїд, поле напружень.

Bubniak T. About bearing capability of composites under conditions of all-round stress

Use of the constructions, made of composite materials, in the building is impossible without a precise analysis of their bearing capability, predicting of ultimate strength of each concrete material under set conditions of exploitation. Such problems shape the subject of space theory of elasticity, which considers distribution of stresses within solid body, containing various heterogeneities. The elements of force constructions are composed of different oriented unidirectional plies or inclusions, e.g. in the form of spheroids, input in a sequence through a thickness. The receipt of reliable and complete information about distribution of the strained-deformed conditions in the construction elements is associated with the use of effective analytical and numeral methods for solution of the tasks of elasticity theory.

Considering the requirements of modern technology, the power structure of the composite should consist of reliable elements, have a pertissible exploitation period, and be insensitive to the onset of the time limit. Development and introduction of new constructive materials forces the necessary to learn how to assess their strength under different types of load.

The effective method of solution of space problems of the theory of elasticity is presented by the Fourier's method, which is based on representation of the equations of equilibrium over potential functions, expanded in the series for Legendre-associated functions.

The research has solved the problem of distribution of circular and meridian stresses on the effect of comprehensive stretching of the body, which contains spheroid inclusion in the non-ideal mechanical and thermal contact, depending on the inclusion geometry. Basing on numerical analyses, the authors of the work have studied concentration of stresses in the environment and inclusion under all-round stretching and effect of a linear field. The article supplies results of the investigation as to mechanical features of the stress fields.

It is confirmed that under increase of the spheroid semiaxes ratio (b – is a small semiaxis, a – is a large semiaxis) and all-round stretching, concentration of circle stresses σ_ϕ significantly increases and concentration of meridian stresses decreases under the

the increasing ratio of $\frac{b}{a}$.

Key words: potential functions, transversal-isotropic body, non-perfect contact, spheroid, field of stresses.

Постановка проблеми. Застосування у будівництві конструкцій із композитів неможливе без точного визначення їх несучої здатності та вміння надійно передбачати граничні навантаження кожного конкретного композиту в умовах експлуатації. Цикл таких проблем належить до просторових задач теорії пружності про розподіл напружень у деформованому твердому тілі, яке містить різні неоднорідності. Елементи силових конструкцій складаються з композитів, виготовлених із різноорієнтованих однонаправлених шарів, або включень, що мають форму, наприклад, сфероїдів, орієнтованих у певній послідовності за товщиною. Отримання достовірної й повної інформації про розподіл напружено-деформівного стану в елементах конструкцій пов'язане з використанням ефективних аналітичних і чисельних методів розв'язку задач теорії пружності.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Ефективним методом розв'язку просторових задач теорії пружності для однозв'язних просторових тіл є метод Фур'є, який базується на представленні рівнянь рівноваги через потенціальні функції, що розкладаються в ряди за приєднаними функціями Лежандра.

Важливі результати у цьому напрямі отримані у працях Подільчука Ю.М., Кириченка А.М., Кучерявого В.А., Соколовського Я.І. та ін., у яких єдиним підходом побудовані розв'язки задач теорії пружності та термопружності для ідеального контакту на межі розділу фаз.

Постановка завдання. Наше завдання – дослідити напружений стан у середовищі та включенні за всестороннього розтягу зразка із сфероїдальним включенням, залежно від геометрії включення.

Виклад основного матеріалу. Розглянуто просторову задачу теорії пружності про розподіл кругових і меридіальних напружень за дії всестороннього розтягу середовища, яке містить сфероїдальне включення в умовах неідеального механічного і теплового контактів за різних співвідношень осей $\frac{b}{a}$ сфероїда $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

Під час розв'язування просторових задач теорії пружності із сфероїдальними включеннями зручно користуватись системами координат для стиснутого сфероїда [2] $(\eta_j, \theta_j, \varphi)$:

$$x = a_j \operatorname{ch} \eta_j \sin \theta_j \cos \varphi, \quad y = a_j \operatorname{ch} \eta_j \sin \theta_j \sin \varphi,$$

$$z = \lambda_j a_j \operatorname{sh} \eta_j \cos \theta_j,$$

$$(0 \leq \eta_j < \infty, \quad 0 \leq \theta_j < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

$$\text{Введемо позначення: } \operatorname{ch} \eta_j = q_j, \quad \operatorname{sh} \eta_j = \bar{q}_j,$$

$$\operatorname{sh} \eta_j = \bar{q}_j, \quad \cos \theta_j = p_j, \quad \sin \theta_j = \bar{p}_j, \quad \operatorname{ch} \eta_{j0} = q_{j0}, \quad \operatorname{sh} \eta_{j0} = \bar{q}_{j0}.$$

На граничній поверхні сфероїда $(\eta_j = \eta_{j0} = \text{const})$ виконуються умови $a_1 q_{10} = a_2 q_{20} = a_3 q_{30}$, $\lambda_1 a_1 \bar{q}_{10} = \lambda_2 a_2 \bar{q}_{20} = \lambda_3 a_3 \bar{q}_{30}$, що забезпечують накладання граничних поверхонь [1].

Рівняння лінійної статичної теорії пружності і термопружності однорідного анізотропного тіла мають вигляд:

$$\lambda_{ij} T_{,ij} = 0, \quad (1)$$

$$c_{ijkl} U_{k,lj} = \beta_{ij} \theta_{,j}, \quad (2)$$

де λ_{ij} , β_{ij} – коефіцієнти теплопровідності і лінійного розширення анізотропного тіла; c_{ijkl} – компоненти тензора пружних властивостей; θ – приріст температури T , U_k – вектор переміщень.

Розв'язання задачі (1), (2) за краєвими умовами неідеального механічного і теплового контактів зводиться до розвинення шуканих потенціальних функцій у тригонометричні ряди за приєднаними функціями Лежандра першого і другого родів $P_n^{(m)}(p)$ і $Q_n^{(m)}(\bar{q})$ [3; 4].

Задовольняючи краєві умови на поверхні включення, а саме:

$$\sigma_\eta^{(1)} = \sigma_\eta^{(2)}, \quad u_\eta^{(1)} = u_\eta^{(2)}, \quad \tau_{\eta\theta}^{(1)} = \tau_{\eta\theta}^{(2)} = 0, \quad \tau_{\eta\varphi}^{(1)} = \tau_{\eta\varphi}^{(2)} = 0,$$

отримуємо нескінченну систему лінійних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу, яка має збіжний розв'язок [5].

Розраховано напружений стан трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням під дією силового лінійного поля з пружними характеристиками контактуючих поверхонь:

$$\text{включення} - \left(10^{10} \frac{H}{M^2} \right) c_{11}^* = 5,97; c_{12}^* = 2,62;$$

$$c_{13}^* = 2,17; c_{23}^* = 6,17; c_{44}^* = 1,64;$$

$$\text{середовище} - \left(10^{10} \frac{H}{M^2} \right) c_{11} = 10,7; c_{12} = 16,5;$$

$$c_{13} = 10,3; c_{23} = 35,81; c_{44} = 7,53.$$

Усі решта – $c_{ij} = 0$, як для включення, так і для середовища.

Висновки. Розв'язана просторова задача теорії пружності для трансверсально-ізотропного

тіла із включенням в умовах неідеального контакту на межі розділу фаз за силового навантаження. На основі чисельного аналізу досліджено концентрацію напружень у середовищі та включенні за всестороннього розтягу за дії лінійного поля.

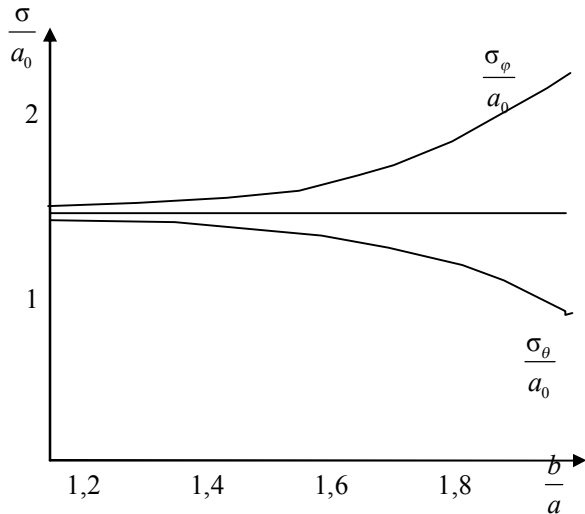


Рис. Концентрація меридіальних і кругових напружень

Виявлені механічні особливості полів напружень. Отримано розподіл концентрацій кругових і меридіальних напружень. Встановлено, що із

збільшенням відношення півосей сфероїда $\frac{b}{a}$ за дії всестороннього розтягу концентрація кругових напружень σ_ϕ значно зростає, а меридіальних σ_θ – спадає.

Бібліографічний список

1. Подильчук Ю. Н. Граничные задачи статки упругих тел. *Пространственные задачи теории упругости и пластичности*: в 5 т. Т. 1. Киев: Наук. думка, 1984. 303 с.
2. Соколовський Я.І., Бубняк Т.І. Напряженное состояние трансверсально-изотропной среды со сфероидальным включением при неидеальном механическом контакте. *Теоретическая и прикладная механика*. 1995. Вып. 25. С. 17–26.
3. Бубняк Т. І., Якимець В. Т. Характеристика концентрації нормальних напружень на поверхні включення. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2014. № 15. С. 23-27.
4. Бубняк Т. І., Фамуляк Ю. Є. Концентрація напружень під час кручення. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2017. № 18. С. 8–11.
5. Бубняк Т. І. Концентрація нормальних напружень у включенні за дії лінійного температурного поля. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2018. № 19. С. 46–48.

Стаття надійшла 20.03.2019.