УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦІЯ НОРМАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ У ВКЛЮЧЕННІ ЗА ДІЇ ЛІНІЙНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Т. Бубняк, к. ф.-м. н.
Львівський національний аграрний університет

https://doi.org/10.31734/architecture2018.19.046

Постановка проблеми. Композитні матеріали поширені в багатьох галузях новітньої техніки – від космічної до виробництва виробів масового споживання. Високі питомі характеристики жорсткості і міцності та особливості технології переробки, які дають змогу створювати матеріали із заданими властивостями, висунули композити на перший план серед сучасних конструктивних матеріалів. Природно, що у зв'язку з розвитком і впровадженням нових конструктивних матеріалів виникла потреба в умінні оцінювати їх міцнісні характеристики за різних навантажень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Просторові задачі теорії пружності і пластичності посідають важливе місце серед задач механіки деформованого твердого тіла.

У праці Ю.М. Подільчука [1] єдиним методом побудовані точні розв'язки першої та другої граничних задач теорії пружності для ізотропних тіл канонічної форми.

Одним із ефективних методів розв'язку задач теорії пружності є метод Фур'є, який базується на представленні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції [2].

Постановка завдання. Наше завдання – розглянути трансверсально-ізотропне середовище, яке містить включення у формі стиснутого сфероїда, на межі розділу фаз обрати умови неідеального теплового контакту, зовнішнє поле – лінійне; знайти розподіл концентрації напружень в околі трансверсально-ізотропного включення під дією лінійного температурного поля; побачити, як впливають розміри еліпсоїдального включення (відношення півосей) на концентрацію напружень.

Виклад основного матеріалу. Розв'язок рівнянь рівноваги у граничних умовах на поверхні включення лінійного силового і температурного полів зводиться до розвинення шуканих потенціальних функцій у тригонометричні ряди за приєднаними функціями Лежандра першого і другого родів [2].

$$\Phi_j(x,y,z_j)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n+1}\frac{n+m}{i(2n+1)}\left\{\frac{P_{n+1}^{(m)}(p_j)Q_{n+1}^{(m)}(i\overline{q}_j)}{(n+m+1)(n+m)}-\frac{P_{n-1}^{(m)}(p_j)Q_{n-1}^{(m)}(i\overline{q}_j)}{(n-m+1)(n-m)}\right\}\cdot\left\{a_{nm}^{(j)}\cos mj+b_{nm}^{(j)}\sin mj\right\},$$
$$j=(1,2,3), \qquad (1)$$

де $a_{nm}^{(j)}, b_{nm}^{(j)}$ – поки що невідомі сталі.

Для неідеального механічного контакту (ковзання включення за напрямками q і j, але на поверхні включення немає відшарування) на поверхні $h_j = h_{j0}$ $(j=1,2,3)$ потрібно задовольнити початкові умови

$$s_h^{(1)}=s_h^{(2)};\quad u_h^{(1)}=u_h^{(2)};\quad t_{hq}^{(1)}=0;\quad t_{hq}^{(2)}=0;$$
$$t_{hj}^{(1)}=0;\quad t_{hj}^{(2)}=0;$$
$$s_h^{(2)}=s_{h,q}+s_{h,o};\quad u_h^{(2)}=u_{h,q}+u_{h,o};$$
$$t_{hq}^{(2)}=t_{hq,q}+t_{hq,o};\ t_{hj}^{(2)}=t_{hj,q}+t_{hj,o}. \qquad (2)$$

Для знаходження загального розв'язку однорідних рівнянь використаємо представлення через три потенціальні функції [1]:

$$u=\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_3}{\partial y};\quad v=\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\Phi_3}{\partial x};$$
$$w=k_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}+k_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}. \qquad (3)$$

Для кожної з них введемо систему вироджених еліпсоїдальних координат

$$x=a_j\,\mathrm{ch}h_j\sin q_j\cos j;$$
$$y=a_j\,\mathrm{ch}h_j\sin q_j\sin j;$$
$$z=l_jz_j=l_ja_j\,\mathrm{sh}h_j\cos q_j;\quad l_j=\sqrt{n_j};$$
$$(0\le h_j<\infty;\ 0\le q_j\le p;\ 0\le j<2p;\quad (j=1,2,3)). \qquad (4)$$

Причому кожна функція (1) є розв'язком рівняння [3]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+n_j\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_j=0 \qquad (j=1,2,3) \qquad (5)$$

Частинний розв'язок неоднорідних рівнянь записують у вигляді:

$$u=\frac{\partial\Phi_4}{\partial x};\quad v=\frac{\partial\Phi_4}{\partial y};\quad w=k_4\frac{\partial\Phi_4}{\partial z}. \qquad (6)$$

Напружений стан у середовищі визначається суперпозицією основного і додаткового, викликаного наявністю включення [4].

Розрахунок термонапруженого стану у трансверсально-ізотропному середовищі із сфероїдальним включенням під дією лінійного температурного поля в умовах неідеального теплового і механічного контактів здійснювали для матеріалів із пружними характеристиками:

включення – (10^{10}н/м^2)

$\tilde{c}_{11} = 5{,}97$; $\tilde{c}_{12} = 2{,}62$;

$\tilde{c}_{13} = 2{,}17$; $\tilde{c}_{23} = 6{,}17$; $\tilde{c}_{44} = 1{,}64$;

середовище – (10^{10}н/м^2)

$c_{11} = 30{,}7$; $c_{12} = 16{,}5$; $c_{13} = 10{,}3$;

$c_{33} = 35{,}81$; $c_{44} = 7{,}53$.

Усі інші $c_{ij} = 0$, $\tilde{c}_{ij} = 0$ – як для включення, так і для середовища.

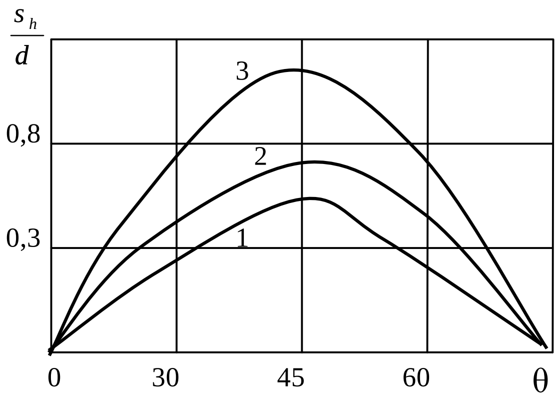

Рис. Ріст термонапружень залежно від геометрії сфероїда

Зауважимо, що в разі рівномірного нагрівання трансверсально-ізотропного середовища із включенням, тобто коли $T_0 = d$, із умов неідеального теплового контакту випливає, що температурне поле у включенні також дорівнює d.

Висновки. Зростання концентрації нормальних напружень під дією лінійної температури вздовж осі OZ для різної геометрії сфероїдів показано на рисунку. Крива (1) побудована для відношення осей $\frac{b}{a} = 0{,}4$, крива (2) – для відношення $\frac{b}{a} = 0{,}5$, крива (3) – для відношення $\frac{b}{a} = 0{,}8$. Аналіз отриманих результатів показує, що максимальної концентрації напружень можна досягнути за кута $\theta = 45^o$, мінімальної – на полюсі. Як видно із графіка (див. рис.), зміна співвідношення осей еліпсоїда у бік зростання призводить до зростання номінальних нормальних напружень.

Бібліографічний список

1. Подильчук Ю. Н. Граничные задачи статики упругих тел. *Пространственные задачи теории упругости и пластичности*: в 5 т. Киев: Наук. думка, 1984. Т. 1. 303 с.

2. Соколовский Я. И., Бубняк Т. И. Напряженное состояние трансверсально-изотропной среды со сфероидальным включением при неидеальном механическом контакте. *Теоретическая и прикладная механика*. 1995. Вып. 25. С. 17-26.

3. Соколовський Я. І., Бубняк Т. І. Просторова задача трансверсально-ізотропного середовища із сфероїдальним включенням при неідеальному механічному контакті. *Доп. НАН України*. 1996. № 9. С. 45-50.

4. Бубняк Т. І., Якимець В. Т. Характеристика концентрації нормальних напружень на поверхні включення. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2014. № 15. С. 23-27.

Бубняк Т.

КОНЦЕНТРАЦІЯ НОРМАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ У ВКЛЮЧЕННІ ЗА ДІЇ ЛІНІЙНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

У механіці деформованого твердого тіла важливе місце посідають просторові задачі теорії пружності і термопружності, які стосуються розподілу напружень в околі неоднорідностей, що містять конструктивні композити. Поява неоднорідностей в одних випадках зумовлена технологією виробництва, в інших – неоднорідність вводять для досягнення оптимальної міцності конструкції.

Важливою є проблема отримання достовірної та повної інформації про розподіл напружень у матеріалах чи елементах конструкцій з урахуванням реальної картини міжфазної взаємодії, що пов'язано з використанням ефективних методів розв'язку просторових задач теорії пружності.

Одним з ефективних методів розв'язку задач теорії пружності є метод Фур'є, який базується на представленні загальних розв'язків рівнянь рівноваги через потенціальні функції. Особливістю застосування методу Фур'є є використання різних представлень розв'язку рівнянь Ляме через гармонічні функції, що дозволяє шукати розв'язок у вигляді рядів.

Розглянуто задачу про розподіл термонапружень необмеженого трансверсально-ізотропного середовища, яке містить анізотропне, відносно механічних і теплових властивостей, включення у формі стиснутого сфероїда за лінійного одноосного нагріву. На межі розділу фаз запропоновано умови неідеального механічного і теплового контактів.

Розрахунок термонапруженого стану у трансверсально-ізотропному середовищі із сфероїдальним включенням за дії лінійного температурного поля в умовах неідеального теплового і механічного контактів проводили для матеріалів: магній – середовище, кобальт – включення.

Аналіз отриманих результатів показує, що максимальна концентрація напруженнь досягається за кута $\theta = 45^o$, мінімальна – на полюсі включення.

Ключові слова: потенціальні функції, трансверсально-ізотропне середовище, неідеальний контакт, сфероїд, поле напружень.

Bubniak T.

CONCENTRATION OF NORMAL STRESSES IN TURN BY THE ACTION OF A LINEAR TEMPERATURE FIELD

In the mechanics of deformed solids, the spatial problems of the theory of elasticity and thermoelasticity, which relate to the distribution of stresses in the vicinity of inhomogeneities containing constructive composites, occupy an important place. The emergence of heterogeneities in some cases is due to the production technology, in others - heterogeneity is introduced to achieve optimal structural strength.

Important is the problem of obtaining reliable and complete information on the distribution of stresses in materials or structural elements, taking into account the real picture of interphase interaction, which is due to the use of effective methods for solving spatial problems of the theory of elasticity.

One of the effective methods for solving the problems of the theory of elasticity is the Fourier method, which is based on the representation of general solutions of equations of equilibrium through potential functions. A feature of the Fourier method is the use of various representations of the solution of the Lyme equations through harmonic functions, which allows us to search for a solution in the form of series.

The problem of the distribution of the thermal stresses of an unbound transversal isotropic medium, which contains anisotropic, with respect to mechanical and thermal properties, inclusion in the form of a compressed spheroid for linear uniaxial heating is considered. At the interface of the phases are offered the conditions of non-ideal mechanical and thermal contacts.

The calculation of the thermo-stressed state in a transversally isotropic medium with a spheroidal inclusion for the action of a linear temperature field under nonideal thermal and mechanical contacts was carried out for materials: magnesium - medium, cobalt - inclusion.

The analysis of the obtained results shows that the maximum concentration of stresses is reached in the corner, the minimum - at the inclusion pole.

Key words: potential functions, transversally isotropic medium, nonideal contact, spheroid, stress field.

Стаття надійшла 23.01.2018.