

## Розділ 1

# АНАЛІТИЧНІ ТА ЧИСЛОВІ МЕТОДИ В МЕХАНІЦІ ТА ФІЗИЦІ РУЙНУВАННЯ БУДІВЕЛЬНИХ МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ

УДК 539.3, 624.04

## ОГЛЯД ПРАЦЬ СТОСОВНО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ R-ФУНКЦІЙ У МЕХАНІЦІ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Ю. Боднар, к. т. н.

*Львівський національний аграрний університет*

<https://doi.org/10.31734/architecture2018.19.005>

**Постановка проблеми.** У 50-70-ті роки минулого століття професор В. Л. Рвачов заклав основи теорії  $R$ -функцій (функцій Рвачова) [1]. Теорія  $R$ -функцій дала змогу вирішити обернену задачу аналітичної геометрії – для будь-якого складного геометричного об'єкта написати його рівняння у вигляді єдиного аналітичного виразу, що є елементарною функцією. Розвиваючи теорію  $R$ -функцій, В. Л. Рвачов звернув увагу на те, що застосування класичних варіаційних методів стримується відсутністю конструктивних засобів побудови координатних функцій, які точно задовольняють задані межові умови для областей складної геометричної форми. Академік разом із учнями, використовуючи конструктивний апарат теорії  $R$ -функцій, розробив єдиний підхід до проблеми побудови координатних послідовностей для основних відомих варіаційних та проєкційних методів [2]. Так отримав розвиток метод  $R$ -функцій для прикладних задач теорії пружності, згину та коливань пластин, електродинаміки, теплофізики тощо.

**Постановка завдання.** Наше завдання – стисло проаналізувати праці з дослідження теорії пружності та термопружності, у яких використовують теорію  $R$ -функцій.

**Виклад основного матеріалу.** У монографії [3] подано детальний аналіз методів та задач механіки деформівного твердого тіла з використанням теорії  $R$ -функцій, відображених у публікаціях до 1990 року. Тому зупинімося коротко на цих публікаціях. У 70-80-х роках школа В. Л. Рвачова побудувала структури першої, другої основних задач теорії пружності, контактної задачі та виконала їх апробації на конкретних задачах [2-5; 7; 8]. У подальшому було узагальнено ці структури на неоднорідні тіла [3; 9; 10]. У праці [9] досліджено вплив зміни пружних

властивостей на напружено-деформований стан неоднорідних циліндрів, у [10] – взаємовплив неоднорідності циліндра із порожнинами та жорсткими включеннями.

У працях [11-15] метод  $R$ -функцій поширений на плоскі та осесиметричні задачі для ортотропних тіл. Побудовані структури та запропоновані алгоритми розв'язування задач. У праці [13] досліджено вплив пружних властивостей ортотропних матеріалів на концентрацію напружень біля отворів та жорстких включень. У [12] проаналізовано вплив анізотропії на напружено-деформований стан криволінійно-ортотропних пустотних циліндрів. Праця [15] присвячена аналізу напружено-деформованого стану криволінійно-ортотропних циліндрів під дією центробіжних сил від обертання.

У праці [16] побудовано розв'язки задач пружно-пластичної деформації тіл скінченних розмірів. Методом пружних розв'язувань пружно-пластична задача зводиться до послідовності задач теорії пружності неоднорідного тіла, для дослідження яких використовують  $R$ -функції і варіаційний підхід. Проаналізовано пружно-пластичний стан пустотних тіл обертання скінченної довжини, які перебувають під дією внутрішнього рівномірно-розподіленого навантаження [17].

У праці [18] метод  $R$ -функцій застосовано для розв'язання певного класу задач теорії тріщин. Розглянуто ізотропну смугу з періодичною системою прямолінійних тріщин, перпендикулярних до осі, і періодичною системою отворів або крайових вирізів. Смуга перебуває під дією силового навантаження, за якого напружено-деформований стан періодичний з періодом, що дорівнює відстані між тріщинами, і симетричний відносно осей тріщин. Задача приведена до межової для періодичного елемента, розміщеного між сусідніми тріщинами. Виписані межові умови

задачі для трансляційного елемента. Запропонована структура розв'язку враховує сигулярний характер поведінки компонент напружень в околі вершин тріщин. Для смуги з періодичною системою двосторонніх крайових тріщин, яка розтягується на безмежності, отримані числові значення коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_I$  і нормальних напружень на продовженні тріщин. Результати порівнянні з розв'язками, отриманими методом інтегральних перетворень. Відзначено досить добру збіжність значень коефіцієнта  $K_I$ , отриманого обома методами.

У працях [19-22] на основі запропонованої у [18] методики виконано аналіз напружено-деформованого стану смуги з періодичною системою прямолінійних тріщин, перпендикулярних до осі, і періодичною системою отворів [21], смуги з періодичною системою прямолінійних тріщин та крайових вирізів [19], смуги з тріщинами, що виходять з кутових вирізів на межі [22], смуги з неоднорідними пружними властивостями та системою тріщин [20].

У праці [23] розглянуто термопружну контактну задачу, яка описує напружено-деформований стан пружного тіла, що міститься в нестационарному температурному полі і стискається гладкими штампами. Термопружну контактну задачу розв'язують послідовним розглядом двох задач: задачі нестационарної теплопровідності і власне контактної. Дискретизацію за часом нестационарної задачі теплопровідності здійснено через заміну похідної за часом скінченими різницями. Подано структури розв'язків задач теплопровідності, які точно описують межові умови першого, другого і третього типів. На кожному часовому шарі, після визначення градієнтів температури у пружному тілі й самої температури на його межі, розв'язують контактну задачу про стиск штампами нагрітого тіла. Побудована методом  $R$ -функцій структура розв'язку контактної задачі точно враховує умови на межі. Для знаходження невизначених компонент структур розв'язків скалярної та векторної задач запропоновано варіаційний метод.

У працях [24-29] розглянуто динамічні осесиметричні задачі теорії пружності та термопружності. Запропоновано розв'язувати задачі спільним застосуванням методу  $R$ -функцій, варіаційного та різницевого. Різницеvim методом вихідні початково-крайові задачі приведені до розгляду квазістатичних задач на часових шарах, а початкові умови враховані на першому часовому шарі. Квазістатичну задачу на часовому шарі розв'язують варіаційним методом з вико-

ристанням координатних послідовностей, побудованих на основі теорії  $R$ -функцій. Запропоновано розвиток методу  $R$ -функцій спільно з методом малого параметра для побудови наближеного розв'язку задачі зв'язаної термопружності про термічне збурення пружного циліндра за миттєвого прикладення поверхневих сил на його торцях.

У праці [24] розглянуто динамічну задачу про контакт без тертя штампів з торцевими ділянками тіла обертання обмежених розмірів. Поверхня тіла поза штампами вільна від навантажень, а початкові умови прийняті нульовими. У рівняннях руху тіла обертання та у рівняннях руху штампів другі похідні за часом замінені на центральні різниці. Як приклад, розглянуто задачу про нестационарні коливання кругового циліндра заданої висоти, який контактує на торцях зі штампами, навантаженими раптово прикладеною силою. Досліджено вплив кількості координатних функцій і величини кроку дискретизації за часом на точність результатів. Аналіз задачі продовжено у праці [28]. Проаналізовано дослідження неусталених коливань однорідного ізотропного циліндра, який контактує без тертя зі штампом. Подано результати розрахунку і аналіз розподілу полів напружень і деформацій у суцільному циліндрі та циліндрі з порожниною. Досліджено вплив наявності порожнини і її форми на розподіл тиску під штампом; розподіл уздовж радіуса осьового напруження в центральному перерізі циліндра для різних моментів часу. Обчислення показали, що наявність порожнини суттєво впливає на розподіл контактних напружень.

У праці [25] розглянуто динамічну задачу теорії пружності для циліндра скінченної довжини. Отримано структуру розв'язку першої основної задачі, яка точно задовольняє межові умови. Подано результати розрахунку розподілу динамічних напружень у круговому циліндрі, які викликані раптово прикладеним навантаженням на торцях. Аналіз показав, що максимальні осьові напруження можуть перевищувати статичні у 2,8 раза, а у центральній частині циліндра ті самі напруження на деякому часовому інтервалі змінюють знак на протилежний, причому зона розподілу розтягувальних напружень має форму еліпсоїда з максимальним значенням у його центрі.

У праці [26] проаналізовано розвиток методу  $R$ -функцій стосовно динамічних задач теорії пружності для ортотропного середовища. Для розв'язування задачі на часовому шарі використовують структуру, отриману в [11].

У праці [27] для розв'язування динамічних задач термопружності застосовано метод  $R$ -

функцій разом з різницею та варіаційним методами.

У праці [29] запропоновано методику розв'язування плоских та осесиметричних нестационарних динамічних задач термопружності. Розглянуто задачу про знаходження неусталених температурних напружень у циліндрі скінченної довжини за теплового удару на його торцях без урахування зв'язності полів деформацій і температури. Алгоритм її розв'язування базується на методах теорії  $R$ -функцій з використанням скінченно-різницевої апроксимації за часом і варіаційних методів.

У працях [30; 31] запропоновано підхід до наближеного розрахунку власних коливань пружних циліндричних тіл скінченної довжини, який базується на методах  $R$ -функцій та варіаційному. Такий підхід дає змогу розглядати циліндри довільної бічної форми. Алгоритм реалізовано за допомогою пакету Maple. Отримано чисельні результати [30] (власні значення та власні форми коливання) прямого кругового пружного циліндра скінченної довжини. Порівняно результати із відомим розв'язком про власні радіальні коливання такого циліндра. Різниця між власними значеннями, отриманими згідно зі запропонованим методом та відомим розв'язком, не перевищує 1%. Також у [31] отримано наближений розв'язок задачі про власні коливання кругового циліндра із кульовою порожниною за двох видів межових умов: відсутність напружень на межі, відсутність напружень на боковій межі та закріплені торці. Отримано власні значення та власні форми коливань. Показано, що за наявності закріплених торців власні значення у рази більші, ніж за вільних торців.

Результати публікацій [24–31] узагальнені у монографії [32].

У працях [33–36] вперше метод  $R$ -функцій застосовано для розв'язання динамічних термопружних задач з урахуванням скінченної швидкості розповсюдження тепла.

У праці [33] перші та другі похідні від температури, а також другі похідні від переміщень за часом замінені на скінченні різниці. У результаті отримано послідовність крайових задач термопружності на часових проміжках, для розв'язання яких запропоновано сумісне використання методу  $R$ -функцій та варіаційного методу Рітца.

Праці [34; 35] присвячені побудові структури розв'язку узагальненої задачі теплопровідності з урахуванням межової умови третього роду. Структура розв'язку задачі побудована за допомогою лівих частин, нормалізованих до

першого порядку рівнянь меж областей та оператора продовження нормальної похідної всередину області. Рівняння меж областей практично довільної геометричної форми може бути побудовано за допомогою  $R$ -функцій.

У праці [36] розглянуто узагальнену задачу Неймана для рівняння теплопровідності. Часовий проміжок покривається рівномірною сіткою, а в рамках часового шару перші та другі похідні від температури та переміщень за часом замінюються скінченними різницями. Побудовано структуру розв'язку, яка точно враховує межові умови другого роду (узагальнена задача Неймана) та геометричну форму області. Для знаходження невизначених компонент структурних формул запропоновано застосовувати варіаційний метод.

**Висновки.** Метод  $R$ -функцій набув широкого розвитку для задач механіки деформівного твердого тіла. Побудовані структури та алгоритми розв'язку плоских та осесиметричних задач теорії пружності ізотропних і ортотропних тіл, задач теорії пластичності, динамічних задач пружності та термопружності. Розглянуті методики та алгоритми можуть бути використані також для моделювання роботи елементів будівель та споруд за різних навантажень і впливів.

#### Бібліографічний список

1. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Техника, 1967. 212 с.
2. Рвачев В. Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.
3. Рвачев В. Л., Синекон Н. С. Метод  $R$ -функций в задачах теории упругости и пластичности. Киев: Наук. думка, 1990. 216 с.
4. Проценко В. С., Проценко В. Г., Синекон Н. С. О решении некоторых контактных задач для упругого прямоугольника структурным методом. *Прикладная механика*. 1974. Т. 10, № 9. С. 60–64.
5. Рвачев В. Л., Проценко В. С. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 235 с.
6. Рвачев В. Л., Синекон Н. С. Формулы свертки в методе  $R$ -функций и их применение к построению структур решений краевых задач. *Докл. АН СССР*. 1980. Т. 225, № 1. С. 80–83.
7. Рвачев В. Л., Синекон Н. С., Эриванцева Л. С. Структуры решений некоторых задач теории упругости для правильного  $n$ -угольника, нагруженного сосредоточенными силами. *Докл. АН УССР*. Сер. А. 1982. С. 33–36.
8. Синекон Н. С. О структуре решения контактной задачи для кусочно-однородного тела конечных размеров. *Докл. АН УССР*. Сер. А. 1981. № 8. С. 59–62.
9. Рвачев В. Л., Синекон Н. С., Кравченко Л. К. Осесимметричная задача теории упругости для

- неоднородного цилиндра. *Прикладная механика*. 1986. Т. 22, № 1. С. 18-24.
10. Рвачев В. Л., Синекон Н. С., Кравченко Л. К. Расчет неоднородного цилиндра с жестким включением. *Математические методы и физико-механические поля*. 1987. Вып. 26. С. 72-78.
11. Рвачев В. Л., Синекон Н. И. Приближенное решение плоской задачи теории упругости для ортотропного тела методом  $R$ -функций. *Доп. АН УРСР*. Сер. А, 1981. № 10. С. 61-64.
12. Рвачев В. Л., Синекон Н. С., Синекон Н. И. Исследование напряженно-деформированного состояния криволинейно-ортотропных цилиндров. *Пробл. прочности*. 1983. № 10. С. 49-53.
13. Рвачев В. Л., Синекон Н. С., Синекон Н. И.  $R$ -функции в задачах теории упругости ортотропного тела с концентраторами. *Тез. докл. республ. симпоз. по концентрации напряжений* (Донецк, 31 мая – 2 июля 1983 г.). Донецк, 1983. С. 98-99.
14. Рвачев В. Л., Синекон Н. С., Синекон Н. И. Плоская задача теории упругости для ортотропного тела конечных размеров. *Прикладная механика*. 1984. Т. 20, № 4. С. 40-49.
15. Рвачев В. Л., Синекон Н. С., Синекон Н. И. Расчет напряженно-деформированного состояния вращающихся криволинейно-ортотропных цилиндров. *Пробл. прочности*. 1987. № 7. С. 76-81.
16. Рвачев В. Л., Синекон Н. С., Кравченко Л. К. О применении метода  $R$ -функций в задачах теории малых упругопластических деформаций. *Докл. АН УССР* Сер. А. 1983. № 1. С. 49-53.
17. Рвачев В. Л., Синекон Н. С., Кравченко Л. К. Исследование упругопластического напряженного состояния тел вращения конечной длины. *Пробл. прочности*. 1984. № 5. С. 94-97.
18. Боднар Ю. І., Синекон М. С. Наближений розв'язок задач теорії тріщин методом  $R$ -функцій. *Доп. АН України*. 1994. № 4. С. 45-48.
19. Боднар Ю. І. Застосування  $R$ -функцій до дослідження взаємовпливу періодичних систем крайових тріщин і вирізів при розтязі смуги. *Вісник Державного університету «Львівська політехніка»: диференціальні рівняння та їх застосування*. 1994. № 277. С. 8-10.
20. Боднар Ю. І. Розтяг неперервно-неоднорідної смуги з періодичною системою двосторонніх тріщин. *Вісник Львівського державного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2005. № 6. С. 49-54.
21. Боднар Ю. І. Дослідження взаємовпливу періодичних систем крайових тріщин в смугі та отворів на її осі. *Вісник Львівського державного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2008. № 9. С. 79-84.
22. Боднар Ю. І. Напружено-деформований стан при розтягуванні смуги з періодичною системою тріщин, які виходять з трикутних концентраторів. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2009. № 10. С. 10-15.
23. Рвачев В. Л., Синекон Н. С., Молотков И. П. Квазистатическая контактная задача термоупругости для тел конечных размеров. *Доп. АН України*. 1994. № 9. С. 84-87.
24. Лобанова Л. С., Синекон М. С. Осесимметрична динамічна контактна задача для тіла обертання скінченної довжини. *Доп. АН України*. 1994. № 10. С. 51-53.
25. Синекон Н. С., Лобанова Л. С. Нестационарное деформирование цилиндра конечной длины. *Проблемы машиностроения*. 1998. Т. 1, № 2. С. 41-47.
26. Рвачев В. Л., Лобанова Л. С., Синекон Н. С. Решение методом  $R$ -функций динамической задачи теории упругости для ортотропного тела конечных размеров. *Доп. НАН України*. 1999. № 4. С. 68-71.
27. Рвачев В. Л., Лобанова Л. С., Синекон Н. С. Метод  $R$ -функций в динамических задачах термоупругости для тел конечных размеров. *Доп. НАН України*. 1999. № 5. С. 64-68.
28. Лобанова Л. С. Структурный метод в задаче о неустановившихся колебаниях цилиндра, контактирующего со штампами. *Проблемы машиностроения*. 2000. Т. 3. № 3-4. С. 99-106.
29. Лобанова Л. С., Синекон Н. С. Нестационарные динамические задачи термоупругости в двухмерных областях. *Проблемы машиностроения*. 2001. Т. 4. № 1-2. С. 108-120.
30. Синекон М. С., Пархоменко Л. О. Розрахунок власних коливань циліндрів. *Прогресивні техніка та технології харчових виробництв ресторанного господарства і торгівлі*. 2009. Вип. 1. С. 295-303.
31. Синекон М. С., Пархоменко Л. О. Дослідження впливу типу граничних умов на власні форми коливань циліндра. *Прогресивні техніка та технології харчових виробництв ресторанного господарства і торгівлі*. 2009. Вип. 2. С. 276-283.
32. Синекон Н. С., Лобанова Л. С., Пархоменко Л. А. Метод  $R$ -функцій в динамических задачах теории упругости: монография. Харьков: ХГУПТ, 2015. 95 с.
33. Боднар Ю., Синекон М. Наближений розв'язок узагальненої динамічної задачі термопружності методом  $R$ -функцій. *Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: 3-тя Міжнар. наук.-техн. конф.* Львів, 2012. С. 17-18.
34. Боднар Ю., Синекон М. Застосування  $R$ -функцій до задач теплопровідності з врахуванням релаксації теплового потоку. *11-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: матеріали симпозіуму*. Львів, 2013. С. 24-25.
35. Боднар Ю. Метод  $R$ -функцій у нестационарних задачах теплопровідності узагальненої термо механіки. *Вісник Львівського національного аграрного університету: архітектура і сільськогосподарське будівництво*. 2014. № 15. С. 21-25.
36. Боднар Ю., Бар В. Структура розв'язку узагальненої задачі Неймана для рівняння теплопровідності. *13-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: матеріали симпозіуму*. Львів, 2017. С. 22-23.

**Боднар Ю.**

### **ОГЛЯД ПРАЦЬ СТОСОВНО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ $R$ -ФУНКЦІЙ У МЕХАНІЦІ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА**

Виконано аналітичний огляд публікацій з питань застосування теорії  $R$ -функцій у задачах механіки деформівного твердого тіла. Розглянуто плоскі та осесиметричні задачі теорії пружності ізотропних та ортотропних тіл, задачі теорії термопружності та теорії пластичності, динамічні задачі пружності та термопружності. Подано короткий аналіз методик та алгоритмів розв'язування цих задач, побудованих на основі теорій  $R$ -функцій, варіаційних та різницевих методів. Проаналізовано отримані на їх основі результати розв'язків конкретних задач для тіл скінченних розмірів, зокрема вплив зміни пружних властивостей, порожнин та жорстких включень на напружено-деформований стан ізотропних та ортотропних тіл, взаємовплив періодичних систем тріщин, отворів, вирізів у смузі, динамічні задачі термопружності за раптового прикладення силових чи температурних навантажень, власні значення та власні форми коливань пружних тіл з порожнинами тощо.

Метод  $R$ -функцій набув широкого розвитку для задач механіки деформівного твердого тіла. Побудовані структури та алгоритми розв'язку плоских та осесиметричних задач теорії пружності ізотропних і ортотропних тіл, задач теорії пластичності, динамічних задач пружності та термопружності. Розглянуті методики та алгоритми можуть бути використані також для моделювання роботи елементів будівель та споруд за різних навантажень і впливів.

**Ключові слова:**  $R$ -функції, пружність, термопружність, пластичність, ізотропні тіла, ортотропні тіла, варіаційний метод, різницевий метод, динамічні задачі.

**Bodnar Yu.**

### **REVIEW OF WORKS ON THE APPLICATION OF THE METHOD OF $R$ -FUNCTIONS IN THE MECHANICS OF DEFORMABLE SOLIDS**

An analytical review of publications on the application of the theory of  $R$ -functions in the problems of the mechanics of a deformable solid is carried out. The plane and axisymmetric problems of the theory of elasticity of isotropic and orthotropic bodies, problems of the theory of thermoelasticity and plasticity theory, dynamic problems of elasticity and thermoelasticity are considered. A brief analysis of methods and algorithms for solving these problems based on theories of  $R$ -functions, variational and difference methods is given. The results of solutions of specific problems for finite-size bodies have been analyzed, in particular, the effect of changes in the elastic properties, voids and rigid inclusions on the stress-deformed state of isotropic and orthogonal bodies, the interaction of periodic systems of cracks, holes, cutouts in the strip, dynamic thermoelasticity problems with sudden use of force or temperature loads, eigenvalues and the forms of oscillations of elastic bodies with cavities, etc.

The method of  $R$ -functions has become widely developed for the problems of the mechanics of a deformable solid. Structures and algorithms of the solution of plane and axisymmetric problems of the elasticity theory of isotropic and orthotropic bodies, problems of plasticity theory, dynamic problems of elasticity and thermoelasticity are constructed. The considered methods and algorithms can also be used for modeling of the elements of buildings and structures at different loads and influences.

**Key words:**  $R$ -functions, elasticity, thermoelasticity, plasticity, isotropic bodies, orthotropic bodies, variational method, difference method, dynamic problems.

*Стаття надійшла 15.03.2018.*