

Key words: drill-impact micropiles with enlarged toe, carrying capacity, comparison, analysis, different methods, geotechnical conditions.

Гнатюк А., Лапчук М. Сравнительный анализ методик определения несущей способности буронабивных железобетонных микросвай

Проведены экспериментально-теоретические исследования несущей способности буронабивных железобетонных микросвай с помощью разных методик и сравнительный анализ полученных результатов.

Ключевые слова: буронабивные железобетонные микросваи с уширенной пятой, несущая способность, сравнение, анализ, разные методики, инженерно-геологические условия.

Стаття надійшла 04.09.2017.

УДК 539.3

РОЗРАХУНКОВА МОДЕЛЬ ІЗОТРОПНОЇ ПЛИТИ, ЗМІЦНЕНОЇ ПРОСТОРОВОЮ ФЕРМОЮ

М. Делявський, д. т. н.

Технологічно-природничий університет в Бидгощі, Польща,

Д. Буханец, інженер

Вища господарська школа в Бидгощі, Польща

Постановка проблеми. Розглянуто певний тип мостової конструкції, складеної з ізотропної прямокутної плити (помосту), вільно спертої на поперечних краях, і просторової ферми, яка утворена з двох плоских ферм, жорстко з'єднаних по верху за допомогою окремих стрижнів (рис. 1).

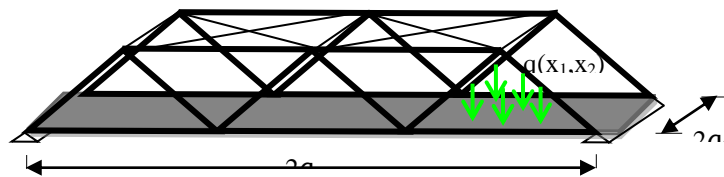


Рис. 1. Схема мостової конструкції

Ферми, на рівні нижнього поясу, жорстко з'єднані в окремих вузлах з поздовжніми краями плити. Таке з'єднання не дає змоги тим вузлам вільно обертатися навколо поздовжньої осі поясу. Не з'єднані частини краю плити можуть обертатися вільно [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Останнім часом загальноприйнятим і найпоширенішим методом вирішення інженерних проблем є метод скінчених елементів, який має практично необмежені можливості розрахунку конструкції. Суттєвим недоліком методу є недостатньо висока точність розрахунку. Тому актуальними залишаються питання створення нових аналітичних

і аналітико-чисельних методів розрахунку конструкцій. Один з таких методів розроблений у нашому дослідженні.

Постановка завдання. Наше завдання – розглянути модель мостової конструкції, яка складається з плити і двох з'єднаних між собою плоских ферм. У моделі конструкцію умовно поділяємо на окремі частини: плиту і плоску ферму, які називаємо макроелементами.

Нехай ферма завантажена лише невідомими силами взаємодії T_s , прикладеними у вузлах нижнього поясу. Плита віднесена до декартової системи координат з початком у її геометричному центрі. Осі $0x_1$ і $0x_2$ розміщені в серединній площині плити, а вісь $0x_3$ спрямована донизу, утворюючи праву систему координат (рис. 2).

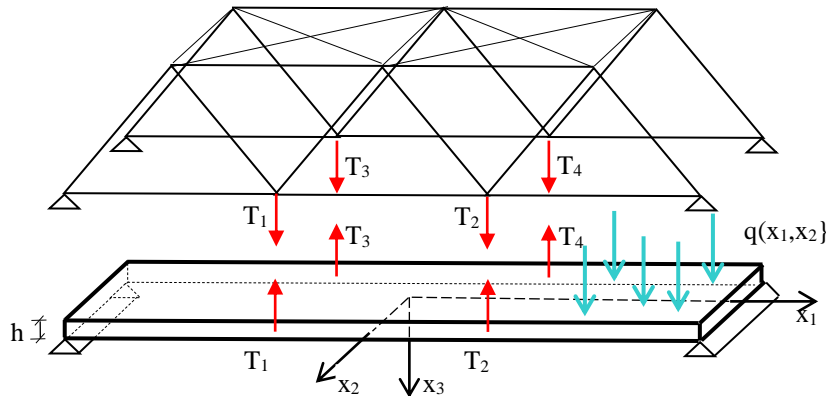


Рис. 2. Розрахункова схема конструкції

Плита завантажена на верхній стороні поперечним навантаженням $q(x_1, x_2)$ і невідомими зусиллями, прикладеними до спільних з фермою вузлів [2-4].

Посаднанням окремих макроелементів будується модель мостової конструкції.

Виклад основного матеріалу. Основне рівняння згину тонкої ізотропної плити має вигляд:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

де w – функція прогину плити; D – її циліндрична жорсткість.

Розв'язок рівняння (1) запишемо у вигляді [5]:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \sum_{j=1}^2 \left\{ R_{(v)2k}^{[j]} W_{(v)2k}^{[j]}(x_1, x_2) + R_{(v)1k}^{[j]} W_{(v)1k}^{[j]}(x_1, x_2) \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^*(x_1, x_2) \quad (2)$$

Вирази за невідомими параметрів $R_{(v)2k}^{[j]}$ названо координатними функціями, а величини зі знаком «*» – функціями навантаження прогину плити. Вираз (2) запишемо у матричній формі [6]

$$w(x_1, x_2) = \llbracket W \rrbracket \{\{R\}\} + W^*, \quad (3)$$

де $\llbracket W \rrbracket$ є координатною матрицею прогину плити. Подібним чином запишемо вирази на дотичні переміщення, моменти, поперечні сили і узагальнені поперечні сили у плиті:

$$u_1 = \llbracket U \rrbracket \{\{R\}\} + U^*, \quad u_2 = \llbracket V \rrbracket \{\{R\}\} + V^*, \quad (4)$$

$$M_{11} = \llbracket X \rrbracket \{\{R\}\} + X^*, \quad M_{22} = \llbracket Y \rrbracket \{\{R\}\} + Y^*, \quad (5)$$

$$Q_2 = \llbracket G \rrbracket \{\{R\}\} + G^*; \quad V_2 = \llbracket L \rrbracket \{\{R\}\} + L^* \quad (6)$$

Якщо на конструкцію діє лише навантаження, перпендикулярне до серединної площини плити, як у розглядуваному випадку, то поздовжніми силами в такій конструкції можна знехтувати.

Тоді розрахунок ферми зводиться до визначення вертикальних переміщень окремих її вузлів, спільних з плитою.

Оскільки конструкція симетрична, то для визначення тих переміщень можна обмежитися лише однією плоскою фермою (рис. 3).

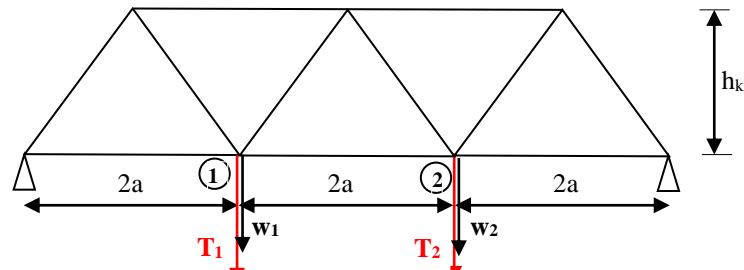


Рис. 3. Частина просторової ферми

Застосовуючи принцип віртуальної роботи, визначаємо переміщення вузлів 1 і 2, спричинених невідомими силами T_1 і T_2 :

$$w_1 = \frac{1}{9h_k^2 EA} \left[T_1 (12b^3 + 68a^3) + T_2 (6b^3 + 58a^3) \right],$$

$$w_2 = \frac{1}{9h_k^2 EA} \left[T_1 (6b^3 + 58a^3) + T_2 (12b^3 + 68a^3) \right], \quad (7)$$

де $b = \sqrt{h_k^2 + a^2}$. Переміщення протилежної частини ферми такі самі:

$$w_1 = w_3, \quad w_2 = w_4. \quad T_s \quad (s = 1 \div 4).$$

Модель мостової конструкції будуюмо з'єднанням окремих макроелементів. Для цього поздовжній край плити K_p подаємо як суму двох множин: дискретної частини K_w , спільної з фермою, і неперервної вільної частини K_s краю плити:

$$K_p = K_w + K_s. \quad (8)$$

Далі неперервну частину краю дискретизуємо, подаючи множину K_p як n -елементну множину, що містить m вільних вузлів і $s = n - m$ спільних вузлів.

У вільних вузлах записуємо краєві умови для згинального моменту і узагальненої поперечної сили:

$$\begin{aligned} M_{22}(x_{1s} \pm a_2) &= \llbracket Y(x_{1s} \pm a_2) \rrbracket \{\{R\}\} + Y^*(x_{1s} \pm a_2) = 0, \\ V_2(x_{1s} \pm a_2) &= \llbracket L(x_{1s} \pm a_2) \rrbracket \{\{R\}\} + L^*(x_{1s} \pm a_2) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

До спільних вузлів плити і ферми прикладаємо невідомі сили взаємодії $T(x_{1s}) = T_s$ і записуємо умову:

$$Q_2(x_{1s} \pm a_2) = \llbracket G(x_{1s} \pm a_2) \rrbracket \{\{R\}\} + G^*(x_{1s} \pm a_2) = T_s. \quad (10)$$

У результаті з'єднання по верху плоских ферм їх дотичні переміщення u_2 будуть нульовими

$$u_2(x_{1s} \pm a_2) = \llbracket V(x_{1s} \pm a_2) \rrbracket \{\{R\}\} + V^*(x_{1s} \pm a_2) = 0 \quad (11)$$

Відповідно, нульовими будуть повороти спільних вузлів нижнього поясу ферми і краю плити навколо своєї осі.

На поперечних краях плити мають бути виконані кінематичні і статичні умови:

$$\begin{aligned} w(\pm a_1, x_2) &= \llbracket W(\pm a_1, x_2) \rrbracket \{\{R\}\} + W^*(\pm a_1, x_2) = 0, \\ M_{11}(\pm a_1, x_2) &= \llbracket X(\pm a_1, x_2) \rrbracket \{\{R\}\} + X^*(\pm a_1, x_2) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Збудована модель містить $4K$ довільних сталих, які визначаються з краєвих умов, записаних у вибраних точках на краю плити.

Щоб визначити невідомі сили взаємодії, накладаємо додаткові обмеження, що вертикальні переміщення спільних вузлів плити і ферми мусять бути однакові.

$$w_p(x_{1s}, a_2) = w_k(x_{1s}) \quad (13)$$

Щоб записати цю умову, подібно до (12), вираз (7) на прогин плити подаємо в матричній формі [6]:

$$w_k(x_{1s} \pm a_2) = [k] \{T\} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & k_{2s} \\ k_{s1} & k_{s2} & k_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_s \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Враховуючи залежності (3) і (14), умову (13) зводимо до матричного вигляду:

$$w(x_{1s}, a_2) = \llbracket W \rrbracket \left\{ \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} + W^*(x_{1s}) = [k] \{T\} \quad (15)$$

або

$$\llbracket W \rrbracket \left\{ \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} + W^* - [k] \{T\} = 0 \quad (16)$$

Записуючи вираз (15) у матричній формі:

$$w(x_{1s}, \pm a_2) = \llbracket W(x_{1s}, \pm a_2) \rrbracket - [k(x_{1s})] \left\{ \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} + W^*(x_{1s}, \pm a_2) = 0, \quad (17)$$

отримуємо краєву умову, подібну до умови (12). Різниця полягає в тому, що тут введені розширена краєва матриця і розширений вектор невідомих. Так само запишемо інші краєві умови:

$$\begin{aligned} u_2(x_{1s}, \pm a_2) &= \llbracket V(x_{1s}, \pm a_2) \rrbracket - [O] \left\{ \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} + V^*(x_{1s}, \pm a_2) = 0 \\ Q_2(x_{1s}, \pm a_2) &= \llbracket G(x_{1s}, \pm a_2) \rrbracket - [I] \left\{ \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} + G^*(x_{1s}, \pm a_2) = 0 \\ M_{22}(x_{1m}, \pm a_2) &= \llbracket Y(x_{1m}, \pm a_2) \rrbracket - [O] \left\{ \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} + Y^*(x_{1m}, \pm a_2) = 0, \\ V_2(x_{1m}, \pm a_2) &= \llbracket L(x_{1m}, \pm a_2) \rrbracket - [O] \left\{ \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} + L^*(x_{1m}, \pm a_2) = 0 \\ w(\pm a_1, x_{2s}) &= \llbracket W(\pm a_1, x_{2s}) \rrbracket - [O] \left\{ \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} + W^*(\pm a_1, x_{2s}) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$M_{11}(\pm a_1, x_{2k}) = \llbracket X(\pm a_1, x_{2k}) \rrbracket - [O] \left\{ \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} + X^*(\pm a_1, x_{2k}) = 0 \quad (19)$$

Отриману систему матричних рівнянь запишемо у вигляді узагальненого матричного рівняння:

$$\llbracket M \rrbracket \left\{ \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} + \{P\} = 0 \quad (20)$$

На відміну від методу скінчених елементів, це рівняння є рівнянням нерозривності переміщень, моментів і поперечних сил в окремих вузлах на краю плити.

Під час обчислень прийнято спрощену модель мостової конструкції, згідно з якою множина K_s є пустою, а K_w – повною, тобто ферма неперервно з'єднана з краєм плити.

Наведемо приклад розрахунку. Навантаження на плиту сталє і дорівнює: $q = 10$ кН/м². До розрахунку вибрано такі параметри плити: модуль Юнга $E = 27000$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, товщина плити $h = 0,3$ м, довжина – $2a_1 = 20$ м, ширина – $2a_2 = 10$ м. Висота ферми вибрана $h = 5$ м; модуль Юнга матеріалу

стрижнів $E = 205000$ МПа, площа поперечного перерізу стрижня $A = 20$ см². Умови неперервності прогинів спільної частини плити і ферми виконано в десяти точках, рівномірно розміщених уздовж нижнього поясу ферми.

Надалі розглянемо два типи ферм: статично визначена і статично невизначена.

Табл. 1 ілюструє точність задоволення умов неперервності прогинів плити і статично визначеної ферми у вільних (не спільних) точках.

Таблиця 1

Задоволення умов неперервності прогинів плити і статично визначеної ферми

x_1	(0,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	(7,5)	(8,5)	(9,5)
Ферма, см	2,4103	2,1879	1,9100	1,6932	1,4432	1,2067	0,9633	0,7234	0,4821	0,2406
Плита, см	2,4103	2,1693	1,9282	1,6872	1,4462	1,2051	0,9641	0,7231	0,4820	0,2410
Різниця, %	0,000	0,860	0,945	0,356	0,204	0,133	0,087	0,044	0,017	0,154

Табл. 2 містить значення прогинів краю плити ($x_2 = 5$), зміцненої фермою (верхній рядок), і вільної плити (нижній рядок). Прогин плити без ферми майже у 15 разів більший, аніж плити, зміцненої фермою.

Верхній рядок таблиці поділено на три рядки: перший містить результати, отримані розробленим методом; другий рядок отримано методом скінчених елементів у програмі «Robot Milenium», а третій рядок становить відносну різницю результатів, отриману такими методами. Найбільше відхилення результатів (близько 7%) спостерігаємо в середині краю плити. Із наближенням до вершини плити та різниця зменшується до нуля.

Таблиця 2

Значення прогинів краю плити

$x_1 =$	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
Плита з фермою, см	1,906	1,730	1,510	1,339	1,141	0,955	0,761	0,572	0,381	0,191	0,000
	2,103	1,819	1,600	1,420	1,220	1,139	0,795	0,591	0,390	0,205	0,000
	10,5 %	6,9%	6,6%	6,0%	5,7%	4,8%	4,4%	3,9%	2,9%	0,4%	0,000
Плита без ферми, см	27,31	26,98	26,01	24,40	22,20	19,45	16,21	12,55	8,569	4,346	0,000

Прогин у середині плити дорівнює $w(0;0) = 2,03737$ см.

У табл. 3 заміщені значення прогинів окремих точок центрального поперечного перерізу ($x_1 = 0$) плити. Перший рядок таблиці поділено на три рядки, сенс яких такий самий, як у попередній таблиці.

На рис. 4 подано графіки зміни прогину плити в її центральному перерізі ($x_1 = 0$) і на краю ($x_2 = a_2$) (рис. 5). Верхні графіки належать до плити, зміцненої фермою, а нижні відповідають плиті без ферми. Як бачимо, ефект зміцнення досить суттєвий. Зміцнення плити зменшує її прогин майже у 15 разів.

Таблиця 3

Значення прогинів центрального поперечного перерізу плити ($x_1 = 0$)

$x_2 =$	0,5	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,1	0,05	0,0
Плита з фермою, см	1,906	1,889	1,877	1,882	1,903	1,932	1,964	1,993	2,017	2,032	2,037
	2,091	2,003	2,039	1,990	2,033	2,021	2,038	2,069	2,080	2,090	2,010
	10,5 %	6,2%	6,0%	5,4%	5,3%	4,8%	4,0%	3,4%	3,0%	3,0%	3,0%
Плита без ферми, см	27,32	27,77	28,16	28,50	28,79	29,02	29,22	29,36	29,47	29,53	29,55

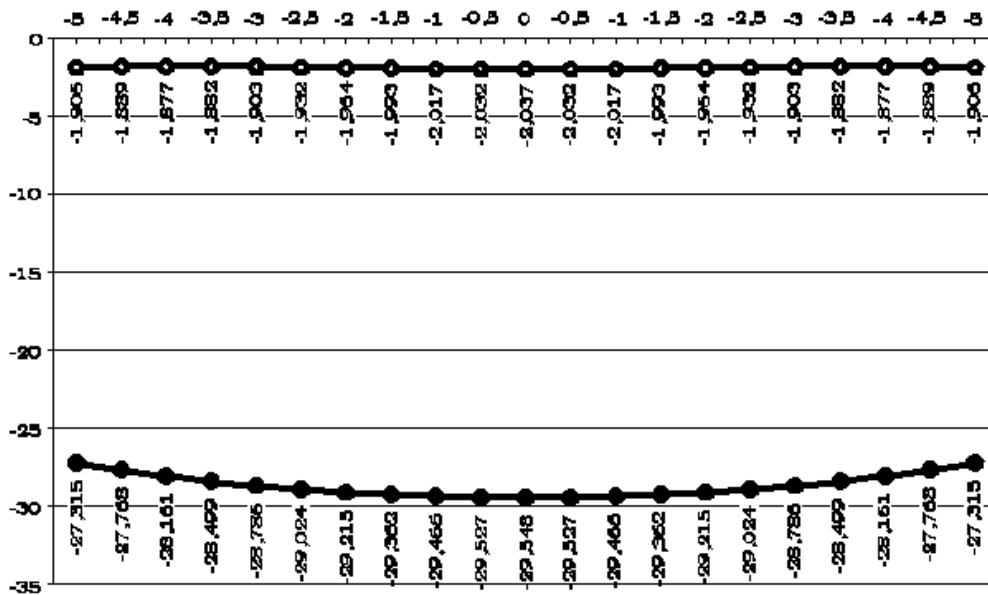


Рис. 4. Значення прогинів центрального перерізу плити ($x_1 = 0$)

Далі розглянемо плиту, один раз зміцнену статично невизначеною фермою з додатковою опорою в центрі.

У табл. 4 подані значення прогинів в окремих спільних точках плити і ферми.

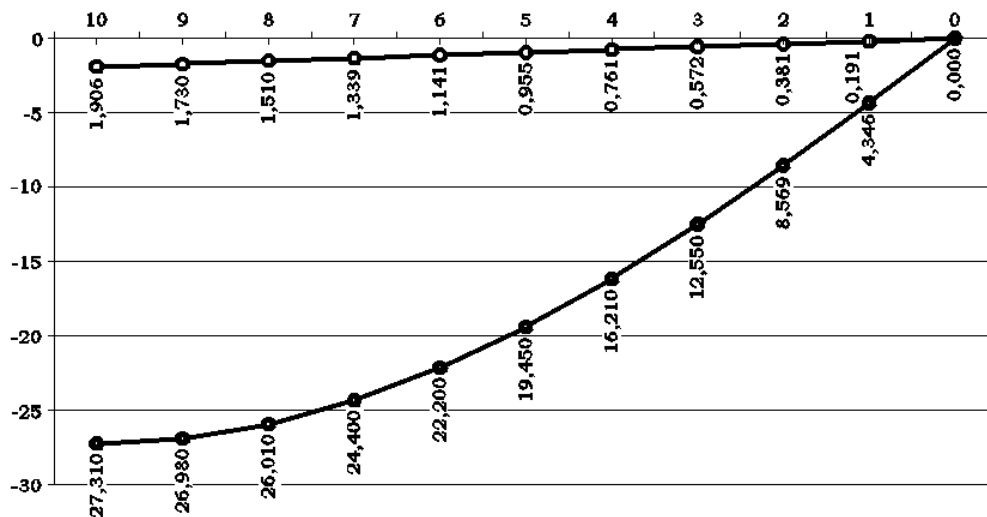


Рис. 5. Значення прогинів краю плити ($x_2 = 5$)

Таблиця 4

Значення прогинів спільної частини плити і ферми

Показник	(0,0;5)	(-0,5;5)	(-1,0;5)	(-1,5;5)	(-2,0;5)	(-2,5;5)	(-3,0;5)	(-3,5;5)
Ферма, см	0,0000	0,2471	0,4942	0,7413	0,9884	1,2355	1,4826	1,7297
Плита, см	0,0000	0,2550	0,4942	0,7937	0,9884	1,1924	1,4826	1,7750
Різниця, %	0,000	4,100	0,000	-6,607	0,000	3,614	0,000	-2,554
Показник	(-4,0;5)	(-4,5;5)	(-5,0;5)	(-5,5;5)	(-6,0;5)	(-6,5;5)	(-7,0;5)	(-7,5;5)
Ферма, см	1,9768	2,2239	2,4710	2,7181	2,9652	2,5946	2,2239	1,8533
Плита, см	1,9768	2,1635	2,4710	2,8309	2,9652	2,7091	2,2239	1,7917
Різниця, %	0,000	2,794	0,000	-3,984	0,000	-4,228	0,000	3,435
Показник	(-8,0;5)	(-8,5;5)	(-9,0;5)	(-9,5;5)				
Ферма, см	1,4826	1,1119	0,7413	0,3322				
Плита, см	1,4826	1,1567	0,7413	0,3326				
Різниця, %	0,000	-3,869	0,000	-0,000				

Максимальне відхилення прогинів плити і ферми, точка $(-6,0;5)$, дорівнює 2,9652 см, що приблизно становить 7 %. Графіки зміни прогину спільного краю плити і ферми подано на рис. 6.

Висновки

1. Запропоновано метод розрахунку ізотропної плити, зміцненої просторовою фермою.
2. Показано, що прогини плити і ферми неперервні на всій довжині нижнього поясу ферми.
3. Виявлено суттєвий вплив зміцнення на значення прогинів плити.
4. Встановлено, що поєднання плити і ферми майже у 15 разів зменшує прогин плити порівняно з плитою без ферми.

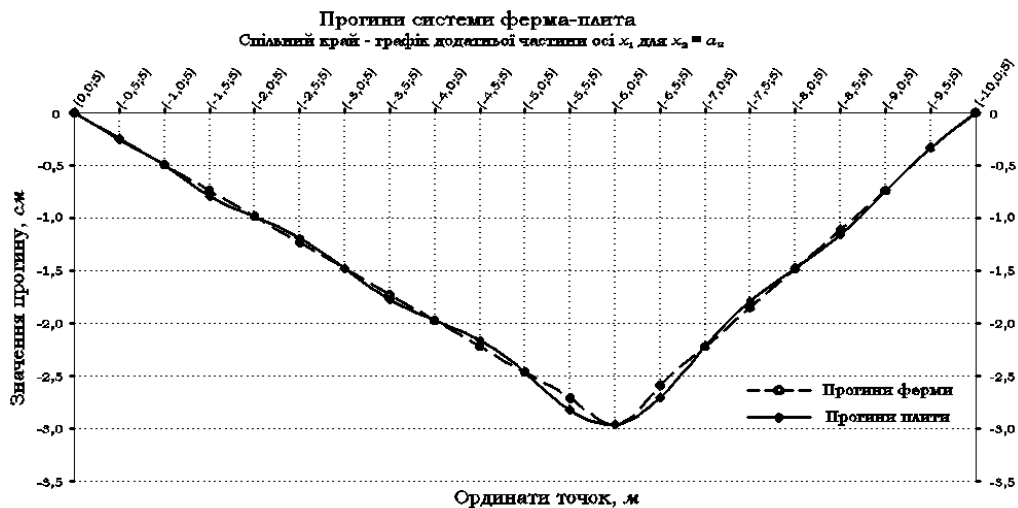


Рис. 6. Значення прогинів спільної частини плити і статично невизначеної ферми

Бібліографічний список

1. Delyavskyy M. Computational model of orthotropic slab reinforced with space truss, Bridges. Tradition and Future / M. Delyavskyy, M. Olejniczak, N. Zdobicka // University of Technology and Life Sciences in Bydgoszcz. – 2011. – С. 57–68.
2. Kamiński R. Analiza wpływu wzmocnienia konstrukcji mostowej na jej stan graniczny / R. Kamiński, K. Sychalska, M. Delyavskyy // SCIENTARIUM POLONORUM ACTA, Architektura, 8, 3-4. – 2009. – С. 33–47.
3. Метод розрахунку напруженого стану мостової конструкції / М. Делявський, Л. Онишко, Я. Нітка та ін. // Машинознавство. – 2004. – № 8. – С. 7–11.
4. Delyavskyy M. Metoda rozwiązywania układów płytowo kratowych. / M. Delyavskyy, A. Podhorecki, J. Nitka // Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej, 23, Gliwice. 2004. – С. 105–110.
5. Здобіцька Н. Моделювання напружено-деформованого стану плит на пружних основах методом конструкційних елементів / Н. Здобіцька, М. Делявський // Наукові нотатки : Міжвузівський збірник (за галузями знань «Машинобудування та металообробка», «Інженерна механіка», «Металургія та матеріалознавство»). – 2010. – № 27. – Луцьк. – С. 105–109.
6. Здобіцька Н. Матричний метод розрахунку плит на пружній основі Вінклера : сільськогосподарські машини / Н. Здобіцька, М. Делявський. – 2009. – № 19. – Луцьк. – С. 63–71.

Делявський М., Буханец Д. Розрахункова модель ізотропної плити, зміцненої просторовою фермою

Розглянуто спрощену модель мостової конструкції. Згідно з моделлю конструкція складається з двох частин: прямокутної вільноспертої ізотропної плити і просторової ферми, які названо макроелементами конструкції.

Розрахунок кожної частини проведено окремо в рамках відповідних математичних моделей. Плита завантажена активним зовнішнім навантаженням, пасивним навантаженням у вигляді опорних реакцій і невідомих зусиль взаємодії.

Ферма завантажена тільки силами взаємодії. Об'єднання (агрегація) окремих частин конструкції в цілісність полягає в задоволенні умов неперервності прогинів і сил взаємодії плити і ферми. Жорстке з'єднання плоских ферм по верху моделюється нульовими поворотами краю плити у спільних вузлах.

Проведено числові розрахунки, які підтверджують точність і ефективність запропонованого методу.

Ключові слова: мостова конструкція, плита помосту, просторова ферма, макроелементи, чисельні розрахунки.

Delyavskyy M., Byhanec D. Calculating model of isotropic plate connected with space truss

The article considers a simplified model of bridge construction. According to the model, the design consists of two parts: a rectangular free-hardened isotropic plate and a spatial farm, which are called macro-structural elements.

The calculation of each part is carried out separately in the ranges of the corresponding mathematical models. The plate is loaded with an active external load, a passive load in the form of reference reactions and unknown interaction efforts. The farm is loaded only by interaction. Integration (aggregation) of separate parts of the design into integrity consists in satisfaction of the conditions of continuity of deflections and forces of interaction of the plate and the farm. The rigid connection of flat trusses at the top is modeled by zero turns of the edge of the plate in the joint nodes. Numerical calculations are carried out confirming the accuracy and efficiency of the proposed method.

Key words: bridged construction, bridge plate, space truss, macroelements, numerical calculation.

Делявский М., Буханец Д. Расчетная модель изотропной плиты, усиленной пространственной фермой

Рассматривается упрощенная модель мостовой конструкции. Согласно модели конструкция состоит из двух частей: прямоугольной свободнолежащей изотропной плиты и пространственной фермы, которые названы макроэлементами конструкции.

Расчет каждой части выполнен отдельно в рамках соответствующих математических моделей. Плита загружена активной внешней нагрузкой, пассивной нагрузкой в виде опорных реакций и неизвестных усилий взаимодействия. Ферма загружена только силами взаимодействия. Объединение (агрегация) отдельных частей конструкции в целостность заключается в удовлетворении условий непрерывности прогибов и сил взаимодействия плиты и фермы. Жесткое соединение плоских ферм по верху моделируется нулевыми поворотами края плиты в общих узлах.

Проведены численные расчеты, подтверждающие точность и эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: мостовая конструкция, плита помоста, пространственная ферма, макроэлементы, численные расчеты.

Стаття надійшла 30.06.2017.